ИЗВЕСТИЯ
ТОМСКОГО ОРДЕНА ТРУДОВОГО КРАСНОГО ЗНАМЕНИ ПОЛИТЕХНИЧЕСКОГО
Том 87 ИНСТИТУТА имени С. М. КИРОВА 1957 г.

ОСОБЕННОСТИ ИНДУКЦИОННОГО УСКОРЕНИЯ В ЭЛЕКТРОМАГНИТЕ С ПРЯМОЛИНЕЙНЫМИ УЧАСТКАМИ

Г. И. ДИМОВ

(Представлено научным семинаром физико-технического факультета)

Одноэлектронная теория индукционного ускорения разработана для аксиально симметричных магнитного управляющего и электрического ускоряющего полей. При этом установлены определенные требования к управляющему и ускоряющему полям.

Как известно, требования к управляющему магнитному полю в индукционных ускорителях—бетатронах и резонансных ускорителях—синхротронах одинаковы. Особенности движения электронов в управляющем поле синхротрона с прямолинейными участками и требования к нему установлены. Электроны могут в таком поле устойчиво двигаться по замкнутой орбите.

Таким образом, отпадает рассмотрение явлений, непосредственно связанных с управляющим полем.

Следует рассмотреть вопросы, связанные с ускоряющим вихревым электрическим полем.

Пусть имеется устойчивая электронная орбита с непостоянным радиусом кривизны r:

$$r = r(x),$$

где x — путь, пройденный электроном.

Амплитуда магнитной индукции должна изменяться по орбите по закону:

$$B_m(x) = \frac{A_m \beta_m}{ecr(x)}, \tag{1}$$

где β_m и A_m — относительная скорость и полная энергия электрона при амплитудном значении магнитного поля,

e — заряд электрона,

c — скорость света.

Магнитное поле изменяется во времени без изменения конфигурации

$$B = B_m(x)\,\vartheta(t), \tag{2}$$

где $\vartheta(t)$—временная зависимость.

Для „идеального" электромагнита с четырьмя прямолинейными участками будет два радиуса кривизны: радиус квадрантов r_0 и радиус кривизны в прямолинейных участках $r = \infty$.

Прирост энергии электрона за оборот должен соответствовать увеличению управляющего магнитного поля за время оборота. Количественно это выражается соотношением между магнитной индукцией на орбите и магнитным потоком, охватываемым орбитой.

Магнитный поток, охватываемый орбитой, определяется уравнением:

$$\frac{d\Phi_k}{dt} = -\int E dx, \ *) \tag{3}$$

где E—напряженность вихревого электрического поля на орбите.

Напряженность электрического поля должна быть пропорциональна заданной скорости изменения количества движения электрона P:

$$E = \frac{1}{e} \ \frac{dP}{dt} \ . \tag{4}$$

Таким образом,

$$d\Phi_k = -[\int E dx] dt = -\frac{1}{e}\left[\int \frac{dP}{dt} dx\right] dt =$$

$$= -\frac{1}{e} \ \frac{d}{dt} [\int P dx] dt = -\frac{1}{e} d[\int P dx]. \ *)$$

Пусть при $t = 0$, $\Phi_k = 0$ и $P = 0$.

Тогда

$$\Phi_k = -\frac{1}{e} \int P dx. \ *) \tag{5}$$

Количество движения должно соответствовать магнитной индукции на орбите и изменяться в соответствии с ростом последней

$$P = -er B = er B_m \vartheta(t). \tag{6}$$

Из (1):

$$rB_m = \text{const},$$

поэтому

$$\int P dx = -er B_m \vartheta(t) \int dx = er BL, \ *) \tag{7}$$

где L—длина орбиты.

После подстановки (7) в (5) получим:

$$\Phi_k = r B L$$

или

$$B = \frac{\Phi_k}{rL} \ . \tag{8}$$

Для „идеального“ электромагнита с четырьмя прямолинейными участками

$$L = 2\pi r_o + 4l,$$

где l—длина прямолинейных участков.

Обозначим:

$$s = \frac{L}{2\pi r_o} \ . \tag{9}$$

Тогда магнитная индукция в квадрантах выразится:

$$B_o = \frac{1}{2s} \ \frac{\Phi_k}{\pi r^2_o} \ . \tag{10}$$

---

*) В формулах под знаком „$\int$“ следует подразумевать круговой интеграл.

Для электромагнита без прямолинейных участков $s=1$, поэтому

$$B_o = \frac{1}{2} \frac{\Phi_k}{\pi r^2_o}.$$

Таким образом, бетатронное соотношение, связывающее магнитную индукцию на орбите и центральный магнитный поток, изменяется с введением в электромагнит прямолинейных участков в s раз (s — коэффициент формы орбиты).

Индукционное ускорение в аксиально-симметричном управляющем магнитном поле $B(x) = \text{const}$ предполагает равномерное распределение ускоряющего электрического поля на орбите:

$$\frac{\partial}{\partial x} E = 0.$$

При этом на протяжении оборота в каждой точке орбиты приращение энергии электрона точно соответствует приращению магнитного поля.

Необходимо определить удовлетворяющее указанному требованию распределение электрического поля $E(x)$ в случае неравномерного распределения магнитной индукции $B(x)$ по орбите

$$E = \frac{1}{e} \frac{dP}{dt} = \frac{1}{e} \frac{d}{dt}(erB) = B\frac{dr}{dt} + r\frac{dB}{dt} =$$

$$= B\frac{dr}{dx}\frac{dx}{dt} + r\left(\frac{\partial B}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial B}{\partial t}\right). \tag{11}$$

Если $\frac{\partial B}{\partial t} = 0$, то $E = 0$ и

$$B\frac{dr}{dx}\frac{dx}{dt} + r\frac{\partial B}{\partial x}\frac{dx}{dt} = 0. \tag{12}$$

При $\frac{\partial B}{\partial t} \neq 0$ последнее уравнение останется в силе (2).

Поэтому

$$E = r\frac{\partial B}{\partial t}. \tag{13}$$

Так как

$$\frac{\partial B}{\partial t} = B_m(x)\frac{d}{dt}\vartheta(t),$$

то

$$E = r(x) B_m(x)\frac{d}{dt}\vartheta(t). \tag{14}$$

Из (1)

$$r(x) B_m(x) = \frac{\beta_m A_m}{ec}.$$

Поэтому

$$E = \frac{A_m \beta_m}{ec}\frac{d}{dt}\vartheta(t). \tag{15}$$

Таким образом,

$$\frac{\partial E}{\partial x} = 0.$$

При любом распределении магнитной индукции по орбите для равновесного движения с ускорением необходимо постоянство тангенциальной составляющей электрического поля по орбите.

В применяемых на практике конструкциях электромагнитов условие $\frac{\partial E}{\partial x} = 0$, как правило, не выполняется.

Даже в „круглых" электромагнитах, где управляющее магнитное поле является аксиально симметричным, например, в Ш-образном электромагните бетатрона типа Керста, ускоряющее вихревое электрическое поле не является равномерно распределенным по орбите.

В электромагните с прямолинейными участками электрическое поле распределено по орбите явно неравномерно.

Расчет вихревого электрического поля может быть произведен методами расчета магнитного поля. Это видно из уравнений Максвелла:

$$\begin{aligned} rot\, E &= -\frac{\partial B}{\partial t}, \\ rot\, H &= j. \end{aligned} \tag{16}$$

Скорость изменения магнитной индукции в электромагните совпадает по направлению с магнитной индукцией и пропорциональна ей. Если найти магнитное поле токов, распределенных подобно распределению магнитной индукции в электромагните, то тем самым будет решена задача определения вихревого электрического поля по орбите. На рис. 1 приводим кривую $E(x)$ для „идеального" электромагнита с прямолинейными участками, полученную указанным методом. Мы видим, что на прямолинейных участках вихревое электрическое поле сильно падает.

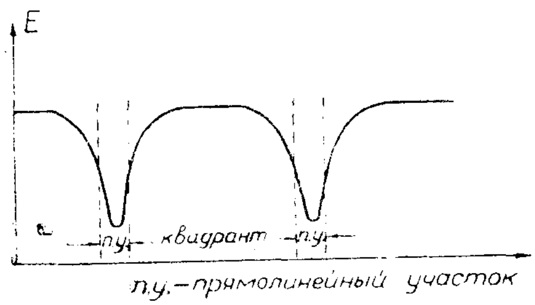

Рис. 1

И в случае $\frac{\partial E}{\partial x} \neq 0$ при удовлетворении бетатронного соотношения соблюдается соответствие между приростом энергии на оборот и приростом управляющего магнитного поля за время оборота. На отдельных же участках орбиты электрон недополучает или переполучает энергию от вихревого электрического поля (аналогичное явление происходит в синхротроне; электрон получает на небольшом отрезке пути энергию, которую ему необходимо получить за весь оборот). Магнитное поле растет равномерно по мере движения электрона; прирост его энергии является равномерным только в среднем за оборот, а в течение оборота скорость прироста энергии колеблется.

Это явление должно вызывать дополнительные радиальные колебания электронов. Вероятно, амплитуда этих колебаний невелика.

Сделаем расчет колебаний, вызываемых неравномерностью вихревого электрического поля по орбите для электромагнита с четырьмя прямолинейными участками.

Пусть электрическое поле распределено по орбите так, как показано на рис. 2. Такое распределение является более неблагоприятным по сравнению с наблюдающимся на практике (рис. 1).

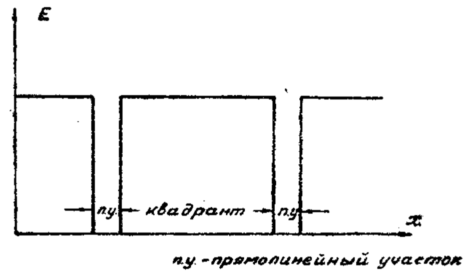

Рис. 2

За время прохождения электрона по прямолинейному участку магнитное поле в квадрантах возрастает па величину:

$$\delta B = \frac{s-1}{4s} \Delta B, \tag{17}$$

где ΔB — прирост магнитного поля за оборот.

Поскольку соответствующего прироста энергии электрона на прямолинейном участке не будет, энергия электрона отклонится от необходимой

$$A\beta = ecr B; \qquad \delta(A\beta) = \frac{s-1}{4s} \Delta(A\beta), \tag{18}$$

где $\Delta(A\beta)$ — отклонение энергии, помноженной на относительную скорость, за один оборот.

Отклонение энергии электрона от необходимой вызовет соответствующее отклонение радиуса электрона в квадранте. Связь между отклонениями энергии и радиуса находится в следующих соотношениях:

$$n = -\frac{\delta B}{B}\frac{r}{\delta r}, \qquad \frac{\delta B}{B} = -n\frac{\delta r}{r}, \qquad A\beta = ecr B,$$

$$\delta(A\beta) = ec(r\delta B + B\delta r) = ecr B\left(\frac{\delta B}{B} + \frac{\delta r}{r}\right),$$

$$\delta A(\beta) = A\beta(1-n)\frac{\delta r}{r}. \tag{19}$$

Таким образом

$$\frac{\delta r}{r} = \frac{s-1}{4s}\frac{1}{1-n}\frac{\Delta(A\beta)}{A\beta} = \frac{s-1}{4s}\frac{1}{1-n}\frac{\Delta B}{B}. \tag{20}$$

Эквивалентная угловая частота свободных колебаний в электромагните с четырьмя прямолинейными участками определяется [1]

$$\omega'_\beta = \frac{1+s}{2s}\omega_\beta, \tag{21}$$

где ω_β — угловая частота свободных колебаний в квадрантах.

Для радиальных колебаний

$$\omega_{\beta r} = \sqrt{1-n}\,\frac{\beta c}{r_o}\,. \tag{22}$$

Частота обращения электрона при наличии прямолинейных участков

$$\omega' = \frac{1}{s}\,\frac{\beta c}{r_o}\,. \tag{23}$$

Из (21), (22), (23) и (9) получим

$$k' = \frac{\omega'_{\beta r}}{\omega'} = \frac{1+s}{2}\sqrt{1-n}\,. \tag{24}$$

Уравнение радиальных колебаний электрона может быть записано в виде

$$x = r - r_o = \delta r \sum_{i=0}^{\nu} \sin(\omega'_{\beta r}t - \alpha_i), \tag{25}$$

где α_i — фаза возмущения колебаний,

ν — число возмущений от начала колебаний.

Возмущения колебаний повторяются через каждую четверть периода обращения T', следовательно:

$$\alpha_o = 0\,; \qquad \alpha_1 = 2\pi\,\frac{1}{4}\,\frac{T'}{T'_{\beta r}} = 2\pi\,\frac{1}{4}\,\frac{\omega'_{\beta r}}{\omega'} = \frac{1}{4}\,2\pi k',$$

$$\alpha_2 = \frac{2}{4}\,2\pi k'; \qquad \alpha_3 = \frac{3}{4}\,2\pi k'; \qquad \alpha_4 = \frac{4}{4}\,2\pi k',$$

$$\alpha_i = i\,\frac{\pi}{2}\,k'. \tag{26}$$

Таким образом,

$$x = \delta r \sum_{i=o}^{\nu} \sin\left(\omega'_{\beta r}t - i\,\frac{\pi}{2}\,k'\right).$$

Используя известное равенство

$$\sum_{i=o}^{\nu} \sin(y + iz) = \sin\left(y + \frac{\nu}{2}\,z\right).\sin\left(\frac{\nu+1}{2}\,z\right)\operatorname{cosec}\frac{z}{2} \tag{27}$$

получим уравнение колебаний в таком виде:

$$x = \frac{\delta r}{\sin\left(k'\,\frac{\pi}{2}\right)}\,.\sin\left(\omega'_{\beta r}t - \frac{\nu\pi}{4}\right).\sin\left(\frac{\nu+1}{4}\,\pi k'\right). \tag{28}$$

Отсюда амплитуда радиальных колебаний

$$x_m = \frac{\delta r}{\sin\left(k' \frac{\pi}{4}\right)}. \tag{29}$$

Подсчеты в конкретных случаях показывают, что радиальные колебания за счет неоднородности вихревого электрического поля невелики.

Индукционное ускорение в электромагните с прямолинейными участками представляет интерес как предварительное ускорение в синхротроне.

ЛИТЕРАТУРА

1. Blachman and Courant, Rev. Sci. Instr, 20, 596—601, 1949.