ИЗВЕСТИЯ
ТОМСКОГО ОРДЕНА ТРУДОВОГО КРАСНОГО ЗНАМЕНИ ПОЛИТЕХНИЧЕСКОГО
Том 87 ИНСТИТУТА имени С. М. КИРОВА 1957 г.

О НЕЛИНЕЙНОЙ ТЕОРИИ ФАЗОВЫХ КОЛЕБАНИЙ, ИНДУЦИРОВАННЫХ КВАНТОВЫМИ ФЛУКТУАЦИЯМИ ИЗЛУЧЕНИЯ В ЭЛЕКТРОННЫХ СИНХРОТРОНАХ

А. Н. МАТВЕЕВ

(Представлено проф. д-р. физ-мат. наук А. А. Воробьевым)

Как известно [1], квантовый характер излучения обусловливает возбуждение фазовых колебаний электронов в синхротронах. Механизм возбуждения этих колебаний аналогичен механизму возбуждения бетатронных колебаний, на который было указано в [2, 3].

В работе [1] вычислялось среднее квадратичное отклонение фазовых колебаний электронов, индуцированных излучением, для мягкофокусированного синхротрона. Вычисление проводилось в линейном приближении и при пренебрежении наличием границ для фазовых колебаний. Это означает, что это вычисление справедливо лишь при малых амплитудах колебаний. Обобщение этих результатов в том же приближении на случай синхротронов с жесткой фокусировкой было проведено в работах [4, 5]. Способ учета поглощенных границ дан в работе [6]. Методом этой работы может быть вычислено не только среднее квадратичное отклонение колебаний, но и получен закон потери интенсивности пучка электронов из-за фазовых колебаний, индуцированных квантовыми флуктуациями излучения.

Линейная теория фазовых колебаний, которая рассматривалась в [1, 4—6], справедлива лишь при малой величине отклонения фазы электронов от равновесного значения. Однако при этом предположении нельзя решить основного вопроса, который нас интересует при рассмотрении колебаний, а именно: вопроса о величинах потерь электронов, обусловленных этими колебаниями. В самом деле, для того, чтобы электрон выбыл из дальнейшего процесса ускорения, необходимо, чтобы его фаза колебания вышла за допустимые границы. Как известно, левой границей фазы электрона является фазовый угол $-2\varphi_s$, причем φ_s есть равновесная фаза. Правая же граница φ_1 определяется из соотношения:

$$\sin\varphi_1 + \sin\varphi_s - (\varphi_1 + \varphi_s)\cos\varphi_s = 1. \tag{1}$$

Для того, чтобы достичь границ, фаза электрона должна отклониться на $2\varphi_s$ влево или на величину $\varphi_1 - \varphi_s$ вправо, т. е. отклониться на довольно большие углы. Например, при $\varphi_s = 45^\circ$ эти отклонения должны быть соответственно равными $2\varphi_s \approx (\pi/2)$ и $(\varphi_1 - \varphi_s) \approx (\pi/4)$, т. е. эти отклонения ни в каком смысле не являются малыми. Следовательно, для рассмотрения основного в теории вопроса о потерях электронов из-за потери фазы линейного приближения недостаточно. В связи с этим возникает вопрос о достоверности предсказаний линейной теории и возникает необходимость построения нелинейной теории без предположения о малости отклонения фазы электронов от ее равновесного значения.

Как нами уже сообщалось, нелинейная теория приводит к значительно более строгим ограничениям, накладываемым на параметры синхротрона в сравнении с линейной теорией. В настоящей работе мы более подробно рассмотрим вопросы нелинейной теории фазовых колебаний, индуцированных квантовыми флуктуациями излучения.

Способ получения нелинейного стохастического уравнения, описывающего фазовые колебания, индуцированные излучением, совершенно аналогичен способу получения линейного стохастического уравнения (2) работы [6]. Это нелинейное стохастическое уравнение имеет следующий вид:

$$\ddot{\psi} + \gamma\dot{\psi} + f^2[\cos\varphi_S - \cos(\varphi_S + \psi)] = \frac{k\,\omega\,\alpha}{\lambda E_S}\,[W_S - \sum_i \varepsilon_i\,\delta\,(t - t_i)], \qquad (2)$$

где использованы следующие обозначения: $\psi = \varphi - \varphi_S$, причем φ—есть фаза прохода электроном высокочастотного поля, а φ_S — равновесное значение этой фазы; ε_i—энергия кванта, излученного в момент времени, характеризуемый индексом этой величины; k—номер гармоники высокочастотного поля, на которой происходит ускорение; R_o—радиус кривизны криволинейных участков синхротрона; $\lambda = 1 + z/2\pi R_o$, где z—суммарная длина всех прямолинейных участков синхротрона на одном обороте;

$$\omega = \frac{c}{R_o\lambda}, \qquad f^2 = \frac{k\,\omega^2\,\alpha}{2\,\pi\lambda}\,\frac{ev_o}{E_S}, \qquad \gamma = (4-\alpha)\,\frac{2\,\omega\,r_o}{3R_o}\left(\frac{E_S}{mc^2}\right)^3;$$

$$r_o = \frac{e^2}{mc^2}, \qquad \frac{\delta < R >}{< R >} = \alpha\,\frac{\delta E}{E}, \qquad W_S = \frac{2\,ce^2}{3\,R_o^2}\left(\frac{E_S}{mc^2}\right)^4;$$

ev_o—амплитуда высокочастотного поля.

В предположении малости ψ уравнение (2) можно линеаризировать и тогда получится линейное уравнение (2) работы [6].

Общий способ решения поставленной задачи заключается, как известно, в следующем. Надо найти решение однородного уравнения (2) в виде разложения Фурье, коэффициенты которого и частоты зависят от некоторого параметра. Затем правую часть уравнения надо рассматривать как малое возмущение, найти влияние этого возмущения на малый параметр, от которого зависят решения однородного уравнения, и затем определить влияние этого возмущения на найденные решения. Учет случайного характера малого возмущения дает возможность выяснить статистические свойства искомых решений.

Однако практическое осуществление указанного метода решения вряд ли возможно ввиду очень большого объема вычислительной работы даже в рамках машинной техники. Поэтому мы применим другой метод.

Прежде всего, перейдем в уравнении (2) к новой независимой переменной ξ_t и новой функции z по следующим формулам:

$$\xi = \int f\,dt, \quad \psi = uz, \quad u = exp\left(-\frac{1}{2}\int^{\xi} q\,d\,\xi\right), \quad q = \frac{f'}{f} + \frac{\gamma}{f}, \quad (3)$$

причем штрихами обозначены производные по ξ. Тогда уравнение (2) примет вид:

$$z'' + \frac{1}{u}\left[\cos\varphi_s - \cos(\varphi_s + uz)\right] - \left(\frac{1}{4}q^2 + \frac{1}{2}q'\right)Z =$$

$$= \frac{k\,\omega\alpha}{\lambda E_s uf}\left[W_{1s} - \sum_i \varepsilon_i\,\delta(\xi - \xi_i)\right], \tag{4}$$

где

$$W_{1s} = W_s/f.$$

В этом уравнении членом

$$-\left(\frac{1}{4}q^2 + \frac{1}{4}q'\right)z \tag{5}$$

можно всегда пренебречь. Обозначим через $\Delta_c E_s$ величину изменения равновесной энергии за период одного синхротронного колебания. Мы, очевидно, имеем:

$$\frac{f'}{f} \sim \frac{\Delta_c E_s}{E_s} \ll 1, \qquad \frac{\gamma}{f} \sim \left[\frac{r_0}{R_0}\left(\frac{E}{mc^2}\right)^3\right]^{1/2} \ll 1. \tag{6}$$

Следовательно, $|q| \ll 1$. Аналогично и $|q'| \ll 1$. Поэтому членом (5) можно всегда пренебречь. Теперь однородное уравнение, соответствующее уравнению (4), можно записать в следующем виде:

$$z'' = \frac{1}{u}\left[\cos\varphi_s - \cos(\varphi_s + uz)\right] = 0. \tag{7}$$

Заметим далее, что $u' = -\frac{1}{2}qu \ll u$. Поэтому, умножив уравнение (7) на z' и проинтегрировав полученный результат с учетом только что указанного неравенства, мы получим константу движения в следующем виде:

$$Q = \frac{z'^2}{2} + \frac{1}{u^2}\left[uz\cos\varphi_s - \sin(\varphi_s + uz)\right]. \tag{8}$$

Из (8) следует, что связанные состояния будут существовать только при следующих значениях константы движения:

$$-\frac{1}{u^2}\sin\varphi_s = Q_{min} \leqslant Q_{max} \leqslant Q = \frac{1}{u^2}(-2\varphi_s\cos\varphi_s + \sin\varphi_s). \tag{9}$$

Если значение Q выйдет по каким-либо причинам из указанных пределов, то частица уйдет на бесконечность, т. е. выпадает из дальнейшего процесса ускорения и будет потеряна.

Теперь возвратимся к уравнению (4). Из этого уравнения видно, что механизм возбуждения фазовых колебаний заключается в скачкообразных изменениях скорости движения фазы частицы, обусловленных актами излучения фотонов. Из этого уравнения видно, что величина скачкообразного изменения $\Delta z'$, обусловленного излучением фотона энергии ε, равна:

$$\Delta z' = -\frac{k\,\omega\,\alpha}{\lambda E_s uf}\,\varepsilon. \tag{10}$$

С другой стороны, из соотношения (8) видно, что среднее изменение константы движения, обусловленное случайными скачками $\Delta z'$, дается равенством

$$< \Delta Q > = < z' \Delta z' > + \frac{1}{2} < (\Delta z')^2 > = \frac{1}{2} < (\Delta z')^2 >, \qquad (11)$$

которое с учетом (10) может быть переписано следующим образом:

$$< \Delta Q > = \frac{1}{2} \frac{k^2 \omega^2 \alpha^2}{\lambda^2 E_S{}^2 u^2 f^2} < \varepsilon^2 >. \qquad (12)$$

Отсюда следует, что если при $\xi = 0$ электроны покоились в наинизшем энергетическом состоянии на дне потенциальной ямы, определяемой соотношением (9), то среднее значение величины Q при других значениях ξ дается равенством:

$$< Q > = -\frac{1}{u^2} \sin \varphi_S + \frac{k^2 \omega^2 \alpha^2}{2\lambda^2} \int\limits_o^\xi \frac{< \varepsilon^2 >}{E_S{}^2 u^2 f^2} d\xi. \qquad (13)$$

Очевидно, что для того, чтобы обеспечить малую величину потерь за счет фазовых колебаний, индуцированных излучением, необходимо потребовать, чтобы было $< Q > \ll Q_{max}$. Это условие малости потерь электронов на основании (13) может быть записано в следующем виде:

$$\frac{k^2 \omega^2 \alpha^2 u^2}{4\lambda^2} \int\limits_o^\xi \frac{< \varepsilon^2 >}{E_S{}^2 f^2 u^2} d\xi \ll (\sin \varphi_S - \varphi_S \cos \varphi_S). \qquad (14)$$

Чем сильнее неравенство (14), тем менее значительны потери электронов из-за фазовых колебаний, индуцированных излучением. Ясно, что при $< Q > = Q_{max}$ все электроны будут практически потерянными.

Производя указанные в (14) вычисления, можно это условие записать следующим образом:

$$\frac{55\pi}{48\sqrt{3}} \frac{k\alpha\omega}{\lambda} \left(\frac{r_o}{R_o}\right)^2 \frac{hc}{e^2} \sqrt{\frac{E_S}{ev_o}} \int\limits_o^t exp\left(-\int\limits_\tau^t \gamma\, d\tau\right) \left(\frac{E_S}{mc^2}\right)^5 \sqrt{\frac{E_S}{ev_o}}\, d\tau \ll$$

$$\ll (\sin \varphi_S - \varphi_S \cos \varphi_S). \qquad (15)$$

Учитывая, что $^1/\gamma$ много больше периода колебаний рассматриваемой системы и много меньше периода ускорения, можно доказать справедливость соотношения:

$$\int\limits_o^t exp\left(-\int\limits_\tau^t \gamma\, d\tau\right) \left(\frac{E_S}{mc^2}\right)^5 \sqrt{\frac{E_S}{ev_o}}\, d\tau \ll \frac{3 R_o}{2(4-\alpha) r_o \omega} \sqrt{\frac{E_S}{ev_o}} \left(\frac{E_S}{mc^2}\right)^2, \qquad (16)$$

причем равенство достигается лишь в следующих случаях:

а) если левая часть возрастает монотонно, то равенство достигается лишь ассимптотически на бесконечности;

б) если левая часть имеет максимум, то равенство достигается в этом максимуме. Заметим, что в реальных ускорителях реализуется случай (а).

Доказательство этого неравенства (16) и высказанных относительно его утверждений очевидно из следующего тождества:

$$\frac{d}{dx}\int_{0}^{x} exp\left(-\int_{\tau}^{x}\gamma\, d\tau\right)f(\tau)d\tau = f(x)-\gamma\int_{0}^{x} exp\left(-\int_{\tau}^{x}\gamma\, d\tau\right)f(\tau)\, d\tau. \quad (17)$$

С учетом (16) условие (15) можно записать в следующем, удобном для применений виде:

$$\frac{55\pi}{32\sqrt{3}}\cdot\frac{k\alpha}{\lambda(4-\alpha)}\cdot\frac{r_o}{R_o}\cdot\frac{hc}{e^2}\cdot\frac{mc^2}{ev_0}\left(\frac{E_S}{mc^2}\right)^3 \ll (\sin\varphi_S-\varphi_S\cos\varphi_S). \quad (18)$$

Это и есть основной критерий нелинейной теории для малости потерь электронов из-за фазовых колебаний, индуцированных квантовыми флуктуациями излучения.

Сравним между собой критерии линейной и нелинейной теории. Обозначим через $F(E)$ величину:

$$F(E)=\frac{55\pi}{16\sqrt{3}}\cdot\frac{k\alpha}{\lambda(4-\alpha)}\cdot\frac{r_o}{R_o}\cdot\frac{hc}{e^2}\cdot\frac{mc^2}{ev_o}\left(\frac{E_S}{mc^2}\right)^3. \quad (19)$$

Тогда критерий нелинейной теории может быть записан в виде:

$$F(E)\ll f_1(\varphi_S); \qquad f_1(\varphi_S)=2(\sin\varphi_S-\varphi_S\cos\varphi_S). \quad (20)$$

Критерий же линейной теории на основании формулы (8) работы [6] записывается следующим образом:

$$F(E)\ll\frac{l^2}{8}\sin\varphi_S=f_2(\varphi_S), \quad (21)$$

где через l обозначена область допустимых колебаний фазы. Значения функций f_1 и f_2 для ряда значений φ_S равны

φ_S	15°	30°	45°	60°
$f_1(\varphi_S)$	0,011	0,09	0,3	0,7
$f_2(\varphi_S)$	0,018	0,15	0,5	1,2

Таким образом, примерно соблюдается соотношение

$$\frac{f_2}{f_1}\approx 1,7. \quad (22)$$

Это означает, что критерий (20) нелинейной теории сильнее, чем критерий (21) линейной теории.

Рассмотрим в качестве примера мягкофокусированный синхротрон без разрезов со следующими значениями параметров:

$$n=0,6,\ R_o=400\ см,\ ev_o=100\ \text{kev},\ k=4.$$

Тогда, выражая E в миллиардах электроновольт, мы имеем:

$$F(E)=0,16\,E^3.$$

Возьмем для определенности равновесную фазу $\varphi_s = 45°$. Тогда из формул видно, что согласно критерию линейной теории левая часть неравенства (21) будет примерно в два раза меньше правой части при энергии 1,3 *Бев.* По критерию же линейной теории (20) видно, что левая часть этого неравенства будет в 2 раза меньше уже при энергии, равной примерно 1 *Бев.* Поэтому если на основе линейной теории мы заключим, что синхротрон перестает работать при рассматриваемых условиях, где-то в области энергий, равных 1,3 *Бев*, то нелинейная теория говорит нам о том, что синхротрон перестает фактически работать при энергиях в области 1 *Бев.*

Таким образом, мы видим, что нелинейная теория существенно корректирует результаты линейной теории. Что же касается важности ее предсказаний, то она очевидна и не требует пояснений.

Таким образом, нелинейная теория фазовых колебаний, индуцированных квантовыми флуктуациями излучения, подтверждает вывод наших работ [5, 6, 7] о неизбежности перехода к жесткой фокусировке при энергии электронов в несколько миллиардов электроновольт.

ЛИТЕРАТУРА

1. M. Sands, Phys. Rev. **97** 470 (1955).
2. А. А. Соколов и И. М. Тернов. ДАН СССР, **92**, 537 (1953); ЖЭТФ, **25**, 698 (1953).
3. А. А. Соколов и И. М. Тернов. ДАН СССР. **97**, 823 (1954); ЖЭТФ, **28**, 432 (1955).
4. А. А. Коломенский. ЖЭТФ, **30**, 207 (1956).
5. А. Н. Матвеев. ДАН СССР, **108**, 432 (1956).
6. А. Н. Матвеев. ДАН СССР, **109**, 495 (1956).
7. А. Н. Матвеев. ДАН СССР, **107**, 671 (1956).