ИЗВЕСТИЯ
ТОМСКОГО ОРДЕНА ТРУДОВОГО КРАСНОГО ЗНАМЕНИ ПОЛИТЕХНИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА имени С. М. КИРОВА
Том 87 1957 г.

К ВОПРОСУ О НЕЛИНЕЙНОЙ ТЕОРИИ РАДИАЛЬНО-ФАЗОВЫХ КОЛЕБАНИЙ

А. Н. ДИДЕНКО

(Представлено проф. д-р. физ.-мат. наук А. А. Воробьевым)

1. Влияние квантового характера излучения на радиально-фазовые колебания в предположении о том, что фаза φ мало отличается от его равновесного значения φ_s (линейная теория), исследовано очень тщательно. Было показано, что существование индуцированных излучением колебаний накладывает существенные ограничения на величину равновесной фазы [1, 2]. Однако линейная теория не может быть применима, если нас интересует вопрос о характере колебаний, не являющихся малыми, или если определяются границы области устойчивости. Поэтому представляет интерес решение нелинейного уравнения фазовых колебаний с учетом излучения. Этот вопрос впервые был рассмотрен А. Н. Матвеевым.

В настоящей работе исследуется характер затухания фазовых колебаний в электронных ускорителях на большие энергии без предположения об их малости; рассматривается вопрос о влиянии квантового характера излучения на радиально-фазовые колебания в нелинейной теории и проводится сравнение результатов линейной и нелинейной теорий методом фазовой плоскости; делается несколько рекомендаций относительно выбора некоторых параметров машин.

2. Если не учитывать квантового характера излучения, т. е. рассматривать излучение как непрерывный процесс потери энергии, то уравнение фазовых колебаний имеет следующий вид:

$$\ddot{\varphi} + \gamma\dot{\varphi} + f^2(\cos\varphi_s - \cos\varphi) = 0, \tag{1}$$

где φ — фаза ускоряющего поля на щели в момент прохождения через нее электрона;

$$\gamma = \frac{(3-4n)}{(1-n)} \cdot \frac{W_s}{E_s}; \qquad f^2 = \frac{1}{(1-n)} \cdot \frac{k}{\lambda^2} \cdot \frac{W_s}{E_s} \cdot \frac{\omega_0}{\cos\varphi_s}.$$

Если ввести безразмерную величину $\zeta = ft$ и считать, что за один период фазовых колебаний величина $exp\left\{-\frac{1}{2}\frac{\gamma}{f}\zeta\right\}$ не изменяется и пренебречь малыми членами, как это делается в [3], то для уравнения сепаратрисы получим выражение:

$$\varphi'^2 = 2\left\{\sin\varphi + \sin\varphi_s - (\varphi + \varphi_s)\cos\varphi_s\right\}. \tag{2}$$

Из (2) видно, что по внешнему виду уравнение сепаратрисы не отличается от того, которое получалось без учета излучения, т. е. излучение не влияет на форму сепаратрисы с точностью до членов порядка $\frac{\gamma}{f}$, которыми пренебрегали во всех вычислениях. Учет отброшенных членов в в уравнении для сепаратрисы приводит к тому, что ее размеры немного уменьшатся, однако это уменьшение будет настолько незначительным (в силу $\frac{\gamma}{f} \ll 1$), что его в дальнейшем не будем учитывать.

Из (2) согласно существующей связи между скоростью изменения фазы и изменением радиуса равновесной орбиты можно определить допустимый разброс по радиусу для частиц, которые еще не выпадают из режима ускорения:

$$\frac{\Delta R}{R} = \frac{\lambda^2}{k} \cdot \frac{f}{\omega_0} \sqrt{2\left\{\sin\varphi + \sin\varphi_S - (\varphi + \varphi_S)\cos\varphi_S\right\}} \tag{3}$$

3. Если теперь учесть, что величины γ, f и $exp\left\{-\frac{1}{2}\frac{\gamma}{f}\zeta\right\}$ медленно меняются со временем, то по известной теореме об адиабатическом инварианте можно получить выражение, характеризующее затухание фазовых колебаний. В нашем случае оно запишется так:

$$\int\limits_{-\varphi_0}^{\varphi_1} \sqrt{\sin\varphi + \sin\varphi_S - (\varphi + \varphi_S)\cos\varphi_S}\, d\varphi = \frac{\text{const}}{fE}\, e^{-\gamma t}. \tag{4}$$

Изображение сепаратрис на фазовой плоскости (рис. 1) приводит к заключению, что они очень сильно похожи на части лемнискаты. Поэтому

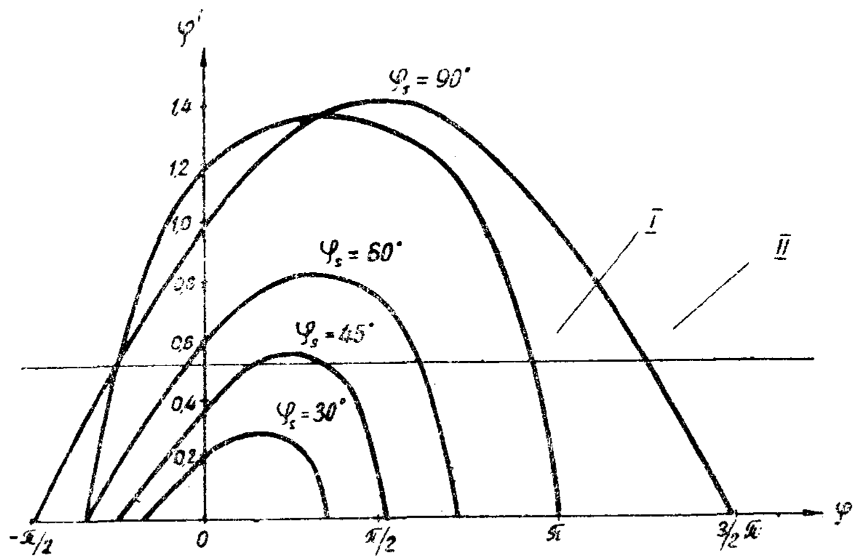

Рис. 1

уравнение сепаратрисы может быть с небольшими погрешностями апроксимировано выражением:

$$r^2 = (\varphi_1 + \varphi_S)^2 \cos 2\theta_S\,, \tag{5}$$

где θ_S — угол, образованный касательной к сепаратрисе в точке $\varphi = -\varphi_S$

с осью φ. Заметим, что θ_s изменяется с изменением φ_s, хотя это изменение и незначительно.

Учитывая (5), получаем:

$$(\varphi_1 + \varphi_s)^2 \sin 2\theta_s = \frac{\text{const}}{E} e^{-\gamma t} \tag{6}$$

или

$$(\varphi_1 + \varphi_s) = \text{const}^1 \sqrt{\frac{1}{E\,V_0(t) \sin^2 2\theta_s}}\; e^{-\frac{1}{2}\gamma t}. \tag{7}$$

Из (7) видно, что для вполне определенного значения равновесной фазы в выражении, характеризующем затухание колебаний, наряду со старым, хорошо изученным сомножителем $\sqrt[4]{\frac{1}{EV_0(t)}}$, учитывающим слабое затухание фазовых колебаний, появляется сомножитель $exp\left\{-\frac{1}{2}\gamma t\right\}$, который приводит к сжатию пучка ускоряемых частиц в сгусток очень малой протяженности за время порядка $\frac{1}{\gamma}$. Поэтому в дальнейшем будем считать, что для электронных ускорителей на большие энергии размеры пучка определяются только внешними факторами и квантовой природой излучения, а не его первоначальной протяженностью. Отметим, что пока излучение рассматриваем как непрерывный процесс потери энергии.

4. Средний квадратичный разброс по энергиям за счет квантового характера излучения можно получить, если величины, характеризующие изменение энергии за какой-то акт излучения, умноженные на соответствующие вероятности излучения и экспоненциальные множители, просуммируем по всем актам излучения и по времени:

$$\left(\frac{\overline{\Delta E}}{E}\right)^2 = \frac{1}{2}\int_0^\infty e^{-\gamma t}\, dt \int_0^\infty \left(\frac{\varepsilon_\nu}{E}\right)^2 W_\nu\, d\nu, \tag{8}$$

где ε_ν — энергия излученного кванта, соответствующая ν — номеру гармоники. Член $1/2$ учитывает тот факт, что фаза излучения — случайная величина.

Подставляя значения входящих в эту формулу величин и производя интегрирование, получаем:

$$\left(\frac{\overline{\Delta E}}{E}\right)^2 = \frac{55\sqrt{3}}{96}\,\frac{(1-n)}{(3-4n)}\,\frac{h\omega_0}{mc^2}\left(\frac{E}{mc^2}\right)^2. \tag{9}$$

Из хорошо известных соотношений, связывающих разброс по энергиям с разбросом по радиусу и скорости изменения фазы, следует, что среднеквадратичному разбросу по энергиям, определяемому (9), соответствуют определенные среднеквадратичные разбросы по скорости изменения фазы

$$\overline{\varphi'^2_{кв}} = \frac{55\sqrt{3}}{64}\,\frac{k}{\lambda}\,\frac{1}{(3-4n)}\,\frac{hc}{e^2}\left(\frac{mc^2}{E}\right)\cos\varphi_s \tag{10}$$

и радиусу

$$\left(\frac{\overline{\Delta R}}{R}\right)^2_{кв} = \frac{\lambda^4}{k^2}\,\frac{f^2}{\omega_0^2}\,\overline{\varphi'^2_{кв.}}. \tag{11}$$

Сравнивая (11) с (3), видим, что частицы не выпадают из режима ускорения, если

$$\varphi'^2 \gg \overline{\varphi}'^2_{кв\ max}.$$

В практике считается, что пучок не будет потерян, если допустимый разброс по радиусу в 2—3 раза превосходит суммарный разброс, вызванный различными причинами. Поэтому неравенство можно записать и так:

$$\varphi'^2 = \alpha^2 \overline{\varphi}'^2_{кв\ max}, \tag{12}$$

где α — коэффициент запаса.

Подставляя в (12) конкретное выражение для $\varphi'^2_{\varphi=-\varphi_S}$ и $\overline{\varphi}'^2_{кв\ max}$, получаем выражение для энергии, при которой начинается сильное уменьшение количества ускоряемых частиц за счет их выпадения из режима ускорения:

$$E_{пред} = mc^2 \sqrt[3]{\frac{\dfrac{2(\sin\varphi_S - \varphi_S\cos\varphi_S)}{\alpha^2}}{\dfrac{55\sqrt{3}\pi}{48}\,\dfrac{k}{\lambda}\,\dfrac{1}{(3\ \ 4n)}\,\dfrac{hc}{e^2}\,\dfrac{e^2}{R}\,\dfrac{1}{eV_0(t)}}}. \tag{13}$$

Функция $F(\varphi_S) = \sin\varphi_S - \varphi_S\cos\varphi_S$ очень быстро растет с ростом φ_S. Поэтому наиболее сильным фактором, влияющим на увеличение $E_{пред}$, является выбор большого значения равновесной фазы в конце ускорения. Кроме того, из (13) видно, что желательным является увеличение радиуса равновесной орбиты, увеличение амплитуды высокочастотного напряжения и уменьшение кратности.

5. Если подобные вычисления проводить по линейной теории, то для φ'^2 и $E_{пред.}$ получим следующие выражения:

$$\varphi'^2 = 2\sin\varphi_S \left| 2\varphi_S^2 - \frac{(\varphi - \varphi_S)^2}{2} \right|, \tag{14}$$

$$E_{пред} = \sqrt[3]{\frac{2\varphi_S^2\sin\varphi_S}{\alpha^2} \cdot \frac{48}{55\sqrt{3}\pi} \cdot \frac{\lambda}{k} \cdot \frac{R}{hc}\, eV_0(t)}, \tag{15}$$

т. е.

$$\frac{E_{пред.\ лин}}{E_{пред.\ нелин}} = \sqrt[3]{\frac{\varphi_S^2\sin\varphi_S}{(\sin\varphi_S - \varphi_S\cos\varphi_S)}}. \tag{16}$$

Из (16) видно, что линейная теория дает слишком завышенные значения для $E_{пред}$.

Заметим, что значения $E_{пред}$, вычисленные по линейной и нелинейной теориям, не совпадают даже при малых значениях φ_S. Это является следствием того, что, пользуясь таким приемом, как обрывание кривой $\varphi' = \varphi'(\varphi)$ для линейного уравнения в точке $\varphi = -\varphi_S$, мы получаем выражение для определения области устойчивости, которое не совпадает с соответствующим выражением для нелинейного уравнения ни при каких значениях равновесной фазы.

Все это можно изобразить в фазовой плоскости. На рис. 1 изображены сепаратрисы для различных значений φ_S, вычисленные по нелинейной теории, и сепаратриса для $\varphi_S = 60^\circ$, вычисленная по линейной теории (кривая I). Прямая $\varphi' = \mathrm{const}$ характеризует уровень шумов, обусловленных квантовой природой излучения в конце ускорения для машины с параметрами, приведенными в статье Сандса [1].

Из рис. 1 и из формул (13) и (15) следует, что при $\alpha = 2—3$ потеря частиц начнется при энергиях порядка 1 *Bev* и что нелинейная теория накладывает более жесткие требования на выбор равновесной фазы в конце ускорения.

Анализ вышеприведенных формул позволяет выбрать параметры таким образом, чтобы потери частиц в конце ускорения были минимальными, хотя свести их к нулю, по-видимому, не удастся.

ЛИТЕРАТУРА

1. **M. Sands**, Phys. Rev. **97**, 470 (1955).
2. Матвеев А. Н. ДАН СССР, том 108, вып. 3. 1956,