ИЗВЕСТИЯ
ТОМСКОГО ОРДЕНА ТРУДОВОГО КРАСНОГО ЗНАМЕНИ ПОЛИТЕХНИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА имени С. М. КИРОВА
Том 88 1956 г.

МЕТОД НАИВЫГОДНЕЙШЕГО ПРОЕКТИРОВАНИЯ И РОДСТВЕННОЕ СООТВЕТСТВИЕ ДВУХ СОВМЕЩЕННЫХ ПЛОСКОСТЕЙ

Л. С. СКРИПОВ

(Представлено проф. докт. техн. наук Балашевым И. А.)

Метод наивыгоднейшего проектирования на одну плоскость предложен был автором как один из новых методов для более простого решения метрических задач, построения теней и аксонометрических изображений.

В настоящей статье предлагается рассмотрение его совместно с родственным соответствием двух совмещенных плоскостей для выяснения некоторых общих свойств обоих методов, удобства совместного применения их и преимущества первого перед вторым в отдельных случаях.

Напомним кратко сущность метода наивыгоднейшего проектирования на одну плоскость. В пространстве выбирается некоторая плоскость и ставится по отношению к данному объекту так, что при прямоугольном на нее проектировании данного объекта получается на этой плоскости сразу же требуемое решение предложенного вопроса.

Родственное соответствие двух совмещенных плоскостей, как известно из теории начертательной геометрии, определяется следующими признаками.

1. Даны ось родства и пара родственных точек.
2. Даны две пары родственных прямых.
3. Даны три пары родственных точек, не лежащих на одной прямой.
4. Даны два родственных треугольника.

Ортогональное проектирование также устанавливает родственное соответствие между плоской фигурой и каждой из ее проекций. Осью родства в этом случае является прямая пересечения плоскости данной фигуры с той или иной плоскостью проекций, а направление проектирования перпендикулярно к оси проекций.

При таком проектировании существуют также свойства родства между проектируемыми фигурами и их проекциями, как приведенные выше.

В теории начертательной геометрии доказывается, что на эпюре горизонтальная и вертикальная проекции одной и той же фигуры (плоской) являются фигурами родственными между собой.

Воспользуемся приведенными свойствами первого и второго методов и рассмотрим их применение на ряде примеров.

На рис. 1 представлен некоторый треугольник АВС в трех проекциях, лежащий в профильно-проектирующей плоскости Q_1 и параллельной оси ОХ.

На основании приведенных свойств родства совмещенных плоских фигур замечаем, что между данным треугольником АВС и его горизонтальной проекцией должно существовать родственное соответствие.

Для нахождения оси родства совмещаем плоскость Q_1 с плоскостью H вращением около следа Q_{H1}, затем поворачиваем плоскость H около оси

OX до совмещения с плоскостью V и получаем фигуру совмещенного данного треугольника в виде $a_1b_1c_1$.

Продолжим его стороны b_1a_1, b_1c_1, a_1c_1 до взаимного пересечения с продолжением тех же сторон горизонтальной проекции треугольника ba, bc, ac в точках c_0, a_0, b_0, лежащих на горизонтальном следе Q_{H1} данной плоскости,

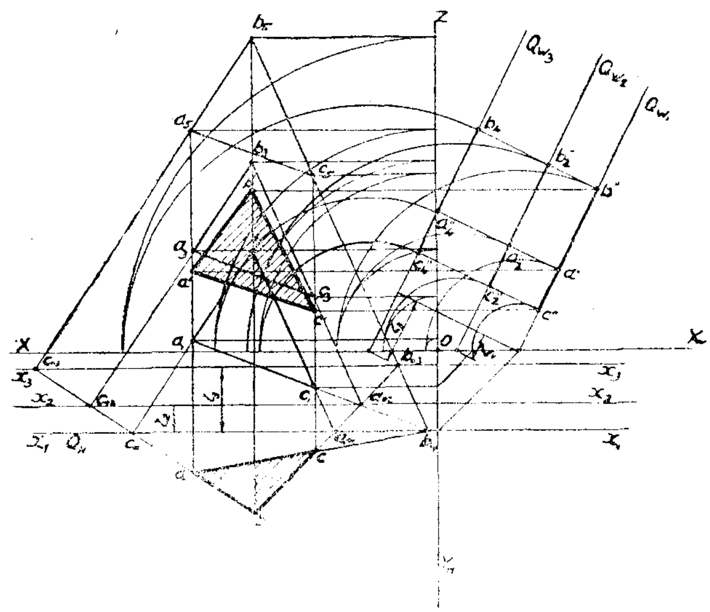

Рис. 1

которая и является в данном случае осью родства x_1x_1, что подтверждает ранее указанные свойства родства при ортогональном проектировании.

Переместим теперь плоскость Q_1 в новое положение Q_2, параллельное первоначальному, и спроектируем на эту плоскость данный треугольник ABC ортогонально. Построение новой проекции выполнено на профильной плоскости в виде линии $c_2''a_2''b_2''$. На новой плоскости Q_2 данный треугольник изобразится в натуральную величину, а следовательно, его фигура остается неизменной, и мы можем утверждать, что между новым изображением данного треугольника на плоскости Q_2 и остающейся неизменной горизонтальной проекцией abc сохраняется прежнее родство.

Для нахождения новой оси родства поступаем, как и в предыдущем случае,—совмещаем плоскость Q_2 с плоскостью H вращением около ее горизонтального следа, затем поворачиваем плоскость H до совмещения с V около оси OX, строим фигуру треугольника $a_3b_3c_3$, равновеликую $a_1b_1c_1$. Продолжаем стороны треугольника b_3a_3 и b_3c_3 до взаимного пересечения с продолжением тех же сторон горизонтальной проекции ba и bc в точках C_{02} и a_{02}, через которые проводим прямую линию x_2x_2, получая, таким образом, новую ось родства, параллельную предыдущей x_1x_1. Линия x_1x_1 переместится в новое положение x_2x_2 на расстояние, равное l_2.

Для подтверждения изложенного взята еще одна плоскость Q_3, параллельная Q_1, на которую ортогонально спроектирован данный треугольник в виде $c_4''a_4''b_4''$ на плоскости W и повторены прежние рассуждения и построения. Получена новая ось родства x_3x_3 в результате перемещения оси x_1x_1 на величину l_3.

Переместим теперь плоскость треугольника ABC в новое общее положение (рис. 2). От такого перемещения родство между треугольником ABC и его горизонтальной проекцией не нарушится. Осью родства и в этом случае является горизонтальный след Q_H, на которой пересекутся продолжение стороны треугольника BC и ее проекции DC и любые линии в его плоскости, например $A1$ и $a1$.

Те же построения проведены и на плоскости рис. 3, где данная плоскость Q совмещена с плоскостью H вращением около следа Q_H.

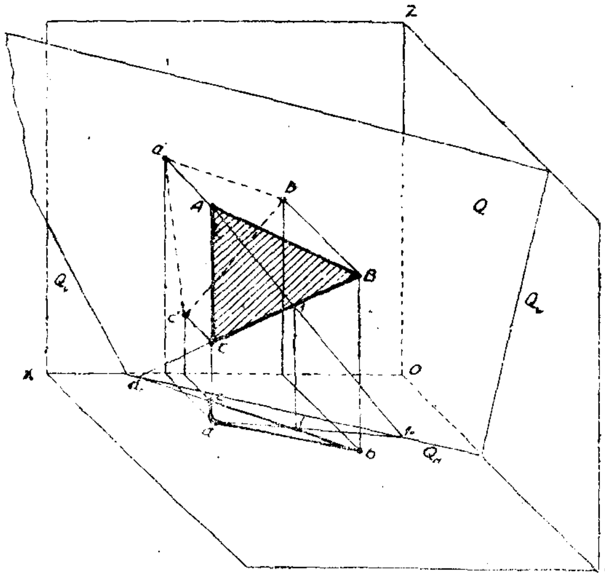

Рис. 2

На рис. 3 найдены точки a_0, b_0, принадлежащие оси родства xx, продолжением сторон a_1c_1, b_1c_1 и ac, bc. На рис. 3 также показаны нахождение оси родства проведением и других линий в плоскости треугольника, а именно фронталей плоскости $a_1 1_0$, $b_1 2_0$, $C_1 3_0$ и их горизонтальных проекций $a1_0$, $b2_0$, $c3_0$, проходящих через вершины треугольника ABC.

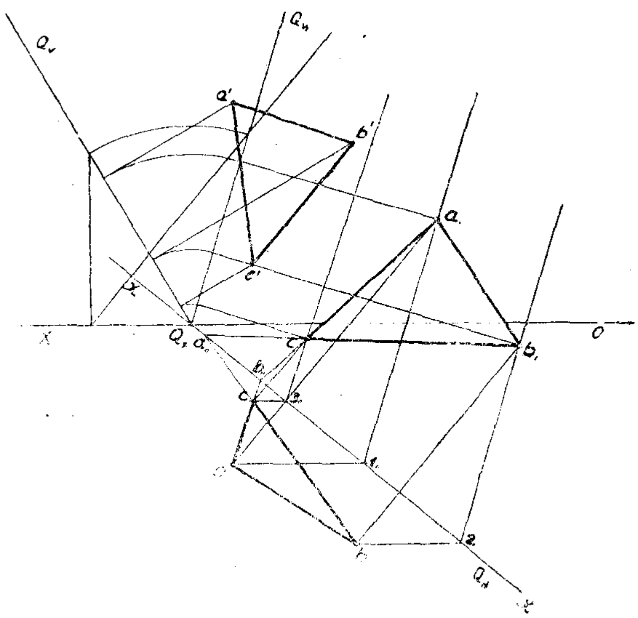

Рис. 3

Если поставить плоскость Q в положение, параллельное плоскости треугольника ABC (рис. 4) и спроектировать ортогонально на нее треугольник, то он спроектируется в натуральную величину $a_1b_1c_1$ и сохранится его родство с прежней неизменной горизонтальной его проекцией abc, а ось родства переместится в новое положение x_1x_1, параллельное линии Q_H или xx.

На рис. 4 показано совмещенное положение $a_2b_2c_2$ треугольника $a_1b_1c_1$ с плоскостью H и найдена ось родства x_1x_1 продолжением сторон b_2c_2 и bc треугольников до взаимного пересечения в точке a.

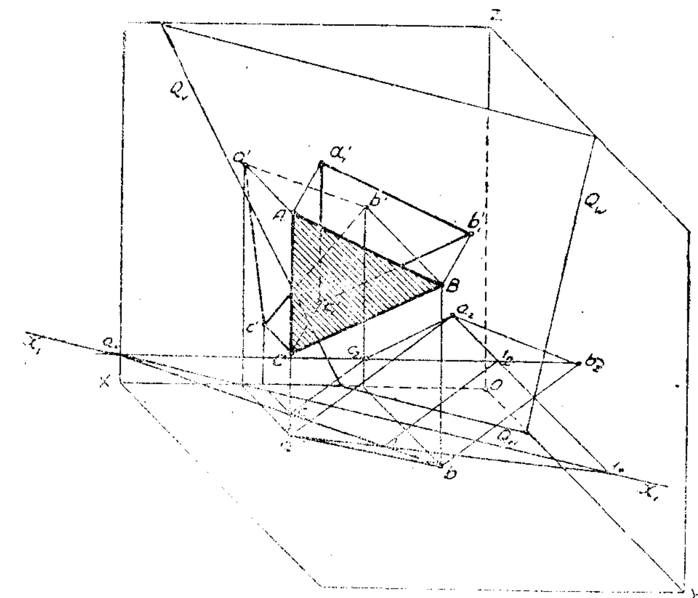

Рис. 4

Вторая точка 1_0 линии родства x_1x_1 определится пересечением проекций какой-либо линии, произвольно взятой в плоском треугольнике, например, $a1$ и a_21_2. То же построение выполнено на плоскостном чертеже (рис. 5) по методу наивыгоднейшего проектирования треугольника ABC на плоскость Q_1, следы которой проведены параллельно горизонтали $B1$ и фронтали $A2$ треугольника ABC.

После совмещения плоскости Q_1 с плоскостью H и построения на совмещенном положении треугольника $a_2b_2c_2$ продолжим стороны треугольников a_2c_2 и ac, b_2c_2 и bc до взаимного пересечения в точках a_0 и b_0, через которые можно уже провести ось родства x_2x_2. На рис. 5 показаны также проекции фронталей, проведенных через вершины треугольников $a_2b_2c_2$ и abc до взаимного их пересечения в точках a_{02}, b_{02}, c_{02} на оси родства x_2x_2.

Установив родственное соответствие двух плоских изображений некоторого треугольника в методе наивыгоднейшего проектирования, рассмотрим ряд конкретных примеров применения этого родства.

Пример 1. Определить расстояние между двумя параллельными прямыми линиями AB и CD (рис. 6) и построить проекции этого расстояния на плоскостях H и V.

Применяя метод наивыгоднейшего проектирования, располагаем некоторую плоскость Q в пространстве перпендикулярно к направлению данных прямых, проводя следы плоскости Q_H и Q_V в произвольном месте рисунка. Проектируем данные линии ортогонально на выбранную плоскость, проводя перпендикуляры из точек прямых A, B, C, D на следы плоскости Q_H и Q_V. Совмещаем плоскость Q с плоскостью H вращением около следа Q_H. Переносим точки встречи перпендикуляров с вертикальным следом Q_v на совмещенное положение следа Q_{v1}. Продолжаем проведение перпендикуляров к Q_{v1} по совмещенной плоскости до встречи с продолжением одноименных перпендикуляров к горизонтальному следу и получаем проекции данных

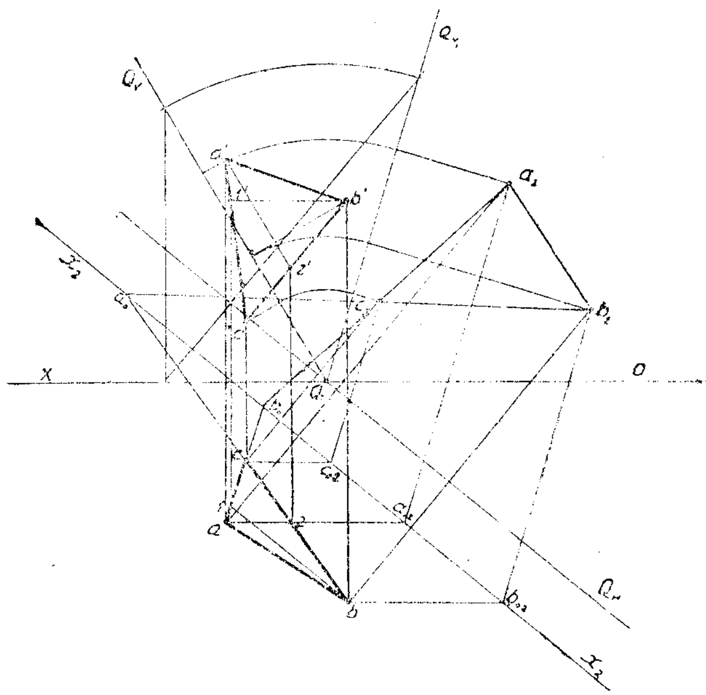

Рис. 5

прямых на выбранной плоскости в виде точек a_1b_1 и c_1d_1. Расстояние между ними и будет искомым расстоянием между данными прямыми AB и CD в виде $5_1—6_1$.

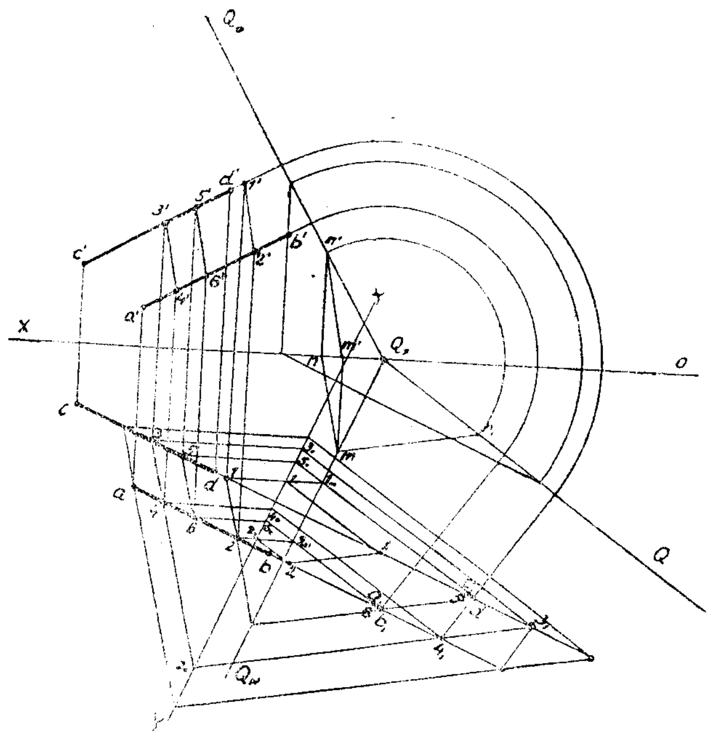

Рис. 6

Для построения этого расстояния на прежних проекциях прямых определим местоположение точек 5 и 6 на горизонтальной и вертикальной проекциях обратным рассуждением. Линия 5—6 перпендикулярна к данным прямым AB и CD и, параллельна выбранной плоскости Q, а следовательно, на плоскости Q можно провести линию mn_1, параллельную 5 — 6.

Возвращаем плоскость Q в прежнее положение вместе с линией mn_1 и строим ее проекции на H и V, т. е. mn и $m'n'$. Взяв произвольно на линии CD точку 5 (5,5'), проводим из нее линию, параллельную MN (mn', $m'n'$), и получаем вторую точку 6 (6,6') на прямой AB. Соединяя полученные точки 5 и 6, получаем проекции искомого расстояния 5 — 6 между данными прямыми (5—6, 5'—6').

То же решение можно было бы получить применением родственного соответствия между изображениями точек 5 и 6 на совмещенной плоскости Q и на плоскости H.

Предположим, что точки 5 и 6 (5,6) найдены на горизонтальных проекциях прямых. Проводим через эти точки проекции фронтали как на H, так и на совмещенной плоскости Q до взаимной их встречи в точках 5_0 и 6_0. Эти точки определяют положение оси родства x_1x_1, параллельную линии Q_H, двух совмещенных плоскостей, на которых расположены родственные точки 5_1 и 5, 6_1 и 6.

Расстояние между параллельными прямыми можно измерить в любом месте на данных линиях, поэтому, применяя законы родственного соответствия, поступаем следующим образом для нахождения этого расстояния на проекциях данных прямых.

Выбираем произвольную точку 3,3' на линии CD. Проводим в произвольном месте линию родства, параллельную следу Q_H. Из точки 3 проводим проекцию фронтали до встречи с осью родства в точке 3_0, из которой проводим родственную фронтали линию, параллельную следу Q_V, до встречи с продолжением перпендикуляра из точек c и d к следу Q_H. Полученная точка 3_1 и будет точкой родственной точке 3 на линии cd. Для нахождения точки 4, конца перпендикуляра, измеряющего расстояние между данными прямыми AB и CD, проводим из найденной точки 3_1 линию, параллельную 5_1—6_1 на совмещенной плоскости до пересечения ее с осью родства в точке 3_{01}, которую затем соединяем с выбранной ранее точкой 3 на линии CD. Искомая точка 4 найдется на пересечении линии 3—3_{10} с проекцией прямой a—b. Следуя таким рассуждениям, можно брать любые точки на данных прямых и находить искомое расстояние между прямыми.

Если бы мы пожелали найти расстояние между прямыми, измеряя его между точками встречи данных прямых с проведенной плоскостью Q, то за ось родства следовало бы принять след плоскости Q_H и из точек 1_1 и 2_1 провести проекции фронталей на совмещенной плоскости Q до пересечения с Q в точках 1_{01} и 2_{01}, а из них—проекции фронталей на плоскости H до встречи с данными прямыми в точках 1 и 2. Расстояние 12, 1'2' было бы искомым на проекциях данных прямых.

Те же точки 1 и 2 имели бы иные родственные точки 1 и 2 на другой совмещенной плоскости, если бы за ось родства была принята линия xx.

Приведенный пример показывает, что для решения предложенного вопроса можно пользоваться исключительно методом наивыгоднейшего проектирования, не применяя законы родства двух совмещенных плоскостей, которые в данной задаче не приносят существенной выгоды в смысле упрощения решения.

Пример 2. Определить кратчайшее расстояние между двумя скрещивающимися прямыми AB и CD (рис. 7) и его проекции на плоскостях H и V.

Для определения натуральной величины искомого кратчайшего расстояния между скрещивающимися прямыми выбираем в любом месте на чертеже плоскость Q, располагая ее перпендикулярно одной из данных прямых, например, CD. Проектируем ортогонально на выбранную плоскость обе прямые и совмещаем затем плоскость Q с плоскостью H. Прямая CD проектируется в точку c_1d_1, а прямая AB в некоторую прямую a_1b_1. Так как расстояние между прямыми измеряется длиной перпендикуляра, опущенного из точки одной из прямых, пусть это будет точка l, на другую прямую, то опускаем из точки l_1 (совмещенной в проекции с c_1 и d_1) перпендикуляр на прямую a_1b_1 в точку k_1, так как линия l_1k_1 параллельна плоскости Q и прямой угол $l_1k_1a_1$ проектируется на нее в натуральную величину.

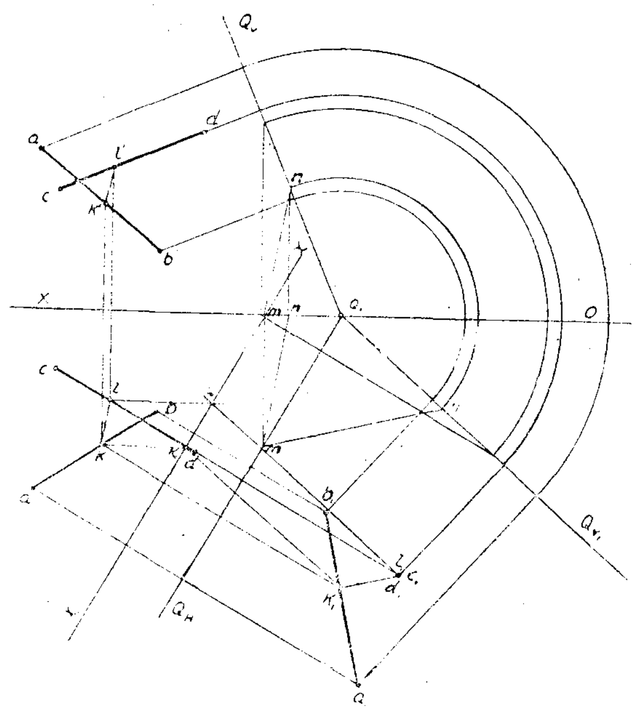

Рис. 7

Для нахождения точек l, l' и k, k^1 на данных проекциях прямых AB и CD проводим в плоскости Q линию mn_1 параллельно l_1k_1 и возвращаем плоскость Q в прежнее положение, строя проекции прямой mn, $m'n'$. Затем из точки k, которая легко находится на горизонтальной проекции прямой ab, проводим линию, параллельную горизонтальной проекции выбранной на плоскости линии mn до встречи в точке l с прямой cd и получаем горизонтальную проекцию искомого кратчайшего расстояния KL, а по ней уже и вертикальную ее проекцию $k'l'$.

Возможно точку l на горизонтальной проекции прямой найти как родственную точку l_1 на совмещенной плоскости Q. Для этого через точки k и k_1 проводим проекции фронталей и продолжаем их до взаимной встречи в точке k_0, через которую затем проводим ось родства xx, параллельную горизонтальному следу плоскости Q_H. Из точки l_1 проводим фронталь по плоскости Q и продолжаем ее до оси родства xx в точку l_0, из которой проводим фронталь на плоскость H до встречи с прямой cd в точке l, которая и будет искомой.

В предложенной задаче метод наивыгоднейшего проектирования и родственное соответствие пожалуй равноценны по удобству получения окончательного результата на данных проекциях.

Пример 3. Построить фигуру нормального сечения трехгранной призмы $ABCABC$ плоскостью Q и определить натуральную ее величину (рис. 8).

Методом наивыгоднейшего проектирования определяем натуральную величину фигуры сечения, проектируя сечение ортогонально на данную плоскость Q, в виде треугольника $1_1\ 2_1\ 3_1$, который совпадает на совмещенной плоскости Q с проекцией на эту плоскость всей призмы $ABCABC$.

Построение проекций фигуры сечения можно осуществить обратным перенесением точек $1_1, 2_1, 3_1$, на горизонтальную и вертикальную проекции ребер призмы путем проведения через эти точки фронталей сначала в совмещенной плоскости Q до следа Q_H в точки $1_0, 2_0, 3_0$ перенесением этих фронталей на первоначальное положение плоскости Q из точек $1'_0, 2'_0, 3'_0$ до встречи с ребрами призмы в точках $1', 2', 3'$ и, наконец, уже построением горизонтальных проекций точек 1, 2, 3. Соединяя полученные точки, построим фигуру искомого сечения в проекциях.

Этот же вопрос можно решить *нахождением* родственных точек на плоскости H по найденным точкам вершин треугольника 1_1, 2_1, 3_1. Так как

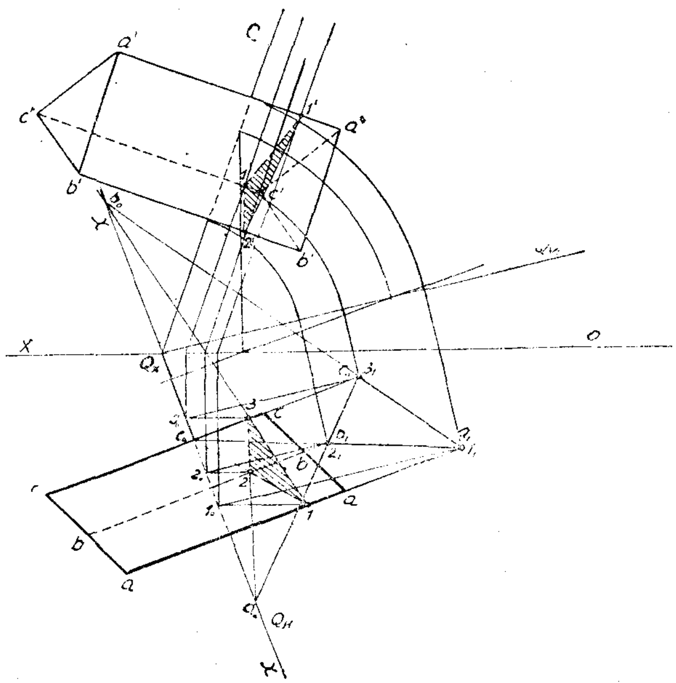

Рис. 8

фигура сечения лежит в плоскости Q, а родственная ей горизонтальная проекция будет лежать на плоскости H, то осью родства $x\,x$, в данном случае, будет след плоскости Q_H.

Проводим через точки 1_1, 2_1, 3_1 фронтали на совмещенной плоскости Q до оси родства, т. е. до точек 1_0, 2_0, 3_0. Из этих точек строим родственные фронталям линии на плоскости H, т. е. линии, параллельные оси OX, до встречи их с соответствующими проекциями ребер призмы в точках 1, 2, 3, соединяя которые, получаем искомую горизонтальную проекцию фигуры сечения 123, а затем уже и вертикальную проекцию.

В данной задаче выгоднее применить законы родственного соответствия совмещенных плоскостей, как требующие меньших построений. Для нахождения горизонтальной проекции фигуры сечения достаточно было бы провести только одну фронталь, например, через точку 1_1 и найти родственную ей точку 1, а остальные точки определились бы продолжением сторон треугольника 1_1, 2_1, 3_1, до оси родства в точки b_0 и c_0, из которых необходимо было бы провести родственные линии b_{01} и c_{01} и в пересечении их с ребрами призмы получить точки 3 и 2.

Пример 4. Через данную прямую $AB\,(ab,\ a'b')$ провести плоскость, касательную к данному шару (центр шара o,o') — (рис. 9).

Пользуясь методом наивыгоднейшего проектирования, проводим плоскость Q в любом месте чертежа, перпендикулярную к данной прямой AB, проектируем затем прямую AB и шар на эту плоскость ортогонально и, наконец, совмещаем плоскость Q с плоскостью H, строя совмещенную проекцию шара и прямой AB. Прямая AB спроектируется в точку a_1b_1, шар в окружность того же радиуса с центром в точке o_2.

Задача будет решена, если найдется точка касания искомой плоскости на шаре, проходящей через данную прямую AB, так как точка и прямая вполне определяют положение плоскости в пространстве.

Для этой цели проводим через точку a_1-b_1 (в которую спроектировалась данная прямая AB) две прямые линии, касающиеся окружности (проекции шара) в двух точках k_3 и k_4, так как задача имеет два решения. Проведенные линии $(a_1-b_1)k_3$ и $(a_1-b_1)k_4$ представляют проекции каких-то плоскостей и точки k_3 и k_4 их касания с шаром. Остается перенести найденные точки k_3 и k_4 на горизонтальную и вертикальную плоскости проекций, для чего сначала проводим линии из точек k_3 и k_4, перпендикулярные к следу Q_H. Затем проводим линии o_2k_3 и o_2k_4, как проекции радиусов шара из центра шара в точки касания плоскостей, а следовательно, перпендикулярные к искомым плоскостям или иначе параллельные плоскости Q.

В совмещенной плоскости проводим две линии в произвольном месте mn, параллельное o_2k_2 и m_1n_1, параллельно o_2k_4. Возвращаем плоскость Q в первоначальное положение, а вместе с ней, проведенные линии и строим их проекции $mn_1\,m'n'$ и m_1n_1, $m_1'n'$. Из горизонтальной проекции центра шара o_1 проводим линии, параллельные горизонтальным проекциям mn и mn_1, до встречи с ранее проведенными линиями из точек k_3 и k_4. Полученные точки k_1, k_2 и будут искомыми. Для нахождения вертикальных проекций этих точек k_1' и k_2' сначала проводятся линии из точки o_1' параллельно вертикальным проекциям линий $m'n'$ и $m_1'n'$ до встречи с вертикальными линиями из k_1 и k_2. Те же точки k_1' и k_2' можно найти обратным построением перпендикуляров к следам плоскости из точек k_3 и k_4.

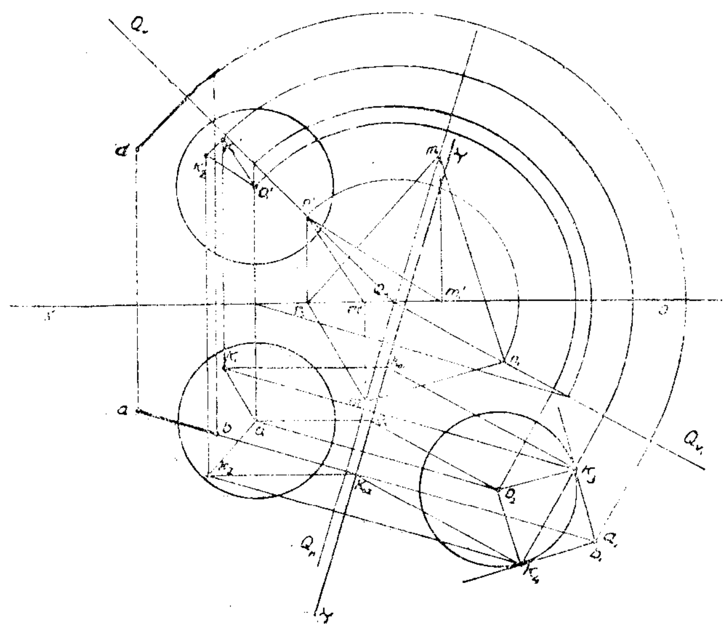

Рис. 9

Искомые точки касания плоскостей к шару можно определить, пользуясь родством точек k_3 и k_1, k_4 и k_2, для чего сначала строим ось родства проведением через проекции центра шара o_2 и o_1 родственные фронтальные линии до взаимной встречи в точке o_0. Через точку o_0 проводим линию родства xx, параллельно следу Q_H. Затем уже из точек k_3 и k_4 проводим фронтали в плоскости Q до встречи с осью родства в точках k_{01} и k_{02}, а от них уже родственные им линии параллельно оси OX до встречи с линиями перпендикуляров к Q_H из точек k_3 и k_4.

В данном вопросе методом родственного соответствия несколько проще и быстрее может быть получено решение задачи.

Пример 5. Построить проекции собственной тени на шаре при данном направлении световых лучей $S(s_1\, s')$ (рис. 10).

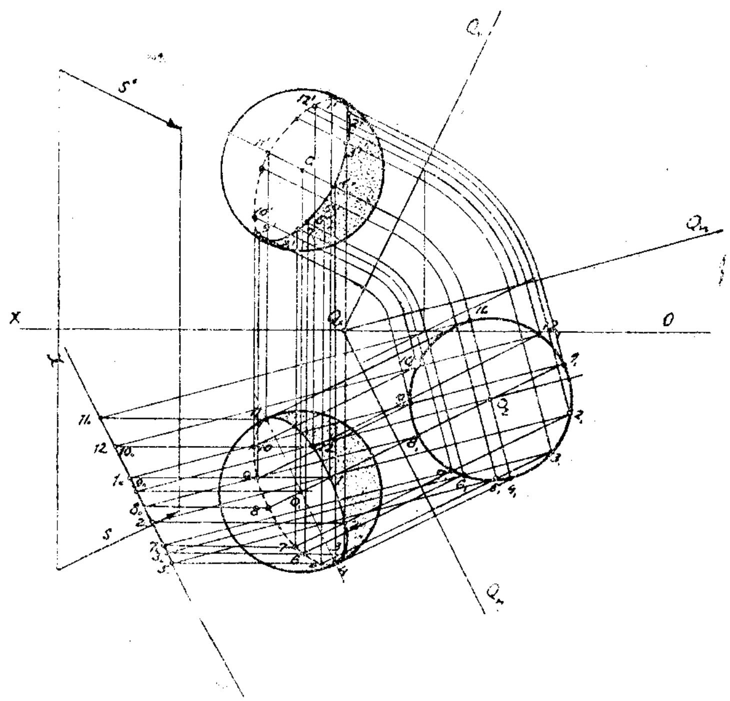

Рис. 10

По методу наивыгоднейшего проектирования выбираем плоскость в любом месте чертежа перпендикулярно к направлению световых лучей (s, s'). Проектируем ортогонально шар на выбранную плоскость и получаем совмещенное положение проекции шара в виде окружности с центром o_2.

В эту же окружность спроектируется и окружность собственной тени на шаре, как геометрическое место точек касания световых лучей с поверхностью шара.

Выбираем произвольное количество точек на этой окружности (в нашем случае взято 12) и переносим их на горизонтальную и вертикальную проекции шара, пользуясь исключительно методом родства, как дающим самое простое решение предложенного вопроса.

Прежде всего определяем ось родства, проводя линии родственных фронталей через центральные точки шара o_2 и o_1 до взаимного пересечения в точке o_0, через которую параллельно следу Q_H проводим линию родства xx.

Пользуясь этой осью, проводим через взятые точки фронтали до оси родства в точки 1_0, 2_0,........ 12_0 и через них родственные фронталям линии на плоскости H до встречи с линиями, проведенными из точек 1_1, 2_1, 3_1.......12_1 перпендикулярно следу Q_H. Полученные точки 1, 2, 3, 4........12 на горизонтальной проекции соединяются затем плавной кривой с учетом ее видимости. На вертикальную проекцию найденные точки очерка тени переносятся обычным обратным построением их по методу наивыгоднейшего проектирования.

Приведенный пример показывает выгодное применение родственного соответствия двух совмещенных плоскостей в методе наивыгоднейшего проектирования.

Пример 6. Через данные три произвольно расположенные в пространстве линии AB, CD EF провести четвертую линию, пересекающую три данные (рис. 11).

По методу наивыгоднейшего проектирования выбираем некоторую плоскость в пространстве, перпендикулярную одной из данных линий, например, CD и проектируем на нее ортогонально все три линии и затем совмещаем

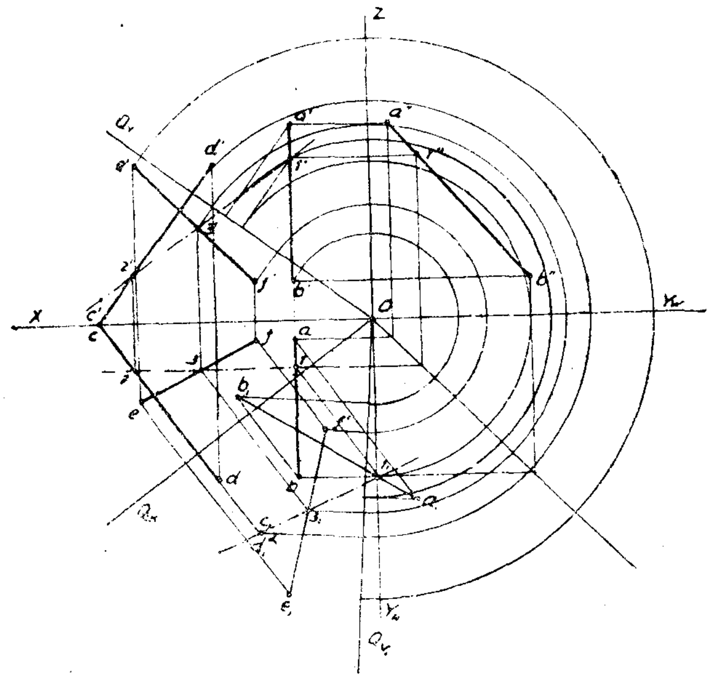

Рис. 11

плоскость Q с плоскостью H. Линия CD на эту плоскость проектируется в точку c_1d_1, а две другие AB и EF—в линии a_1b_1 и e_1f_1. Через точку c_1d_1, точнее через некоторую точку 2_1 на линии CD проводим произвольную линию $2_1\,3_1\,1_1$, пересекающую две другие линии в точках 3_1 и 1_1. Возвращаем плоскость Q в прежнее положение и переносим полученные точки 1_1, 3_1 сначала на горизонтальную проекцию ab и ef, а потом на вертикальную—$a'b'$ и $c'f'$ и соединяем их затем уже прямыми $1—3$ и $1'—3'$ до пересечения в точке $2,2'$ с линией CD.

Задача имеет неограниченное количество решений.

Приведенный пример показывает тот случай, когда невозможно для решения задачи прибегнуть к законам родственного соответствия двух совмещенных плоскостей и следует пользоваться исключительно законами наивыгоднейшего проектирования.

Пример 7. Построить объемное изображение (аксонометрию) некоторого уголка, данного ортогональными его проекциями на H и V в заданном направлении проектирования (рис. 12).

Выбираем в пространстве некоторую плоскость Q, перпендикулярную к данному направлению проектирования (s, s'). Совмещаем плоскость с плоскостью H и, применяя метод наивыгоднейшего проектирования, строим искомое пространственное изображение уголка, рассматривать которое необходимо по направлению проектирующих лучей S, повернув рисунок так, чтобы след плоскости Q_H принял горизонтальное положение.

В предложенном вопросе показано исключительное применение метода наивыгоднейшего проектирования, позволяющего только при помощи его легко и просто разрешить задачу подобного рода.

Более подробно и обстоятельно последний вопрос изложен в труде автора—аксонограф в 1940 г.

Рассмотренные примеры, конечно, далеко не исчерпывают все случаи совместного применения метода наивыгоднейшего проектирования и родственного соответствия двух совмещенных плоскостей, показывают:

1. В отдельных случаях совместное применение не дает особых преимуществ в упрощении решения предложенных вопросов.

2. В других случаях совместное применение методов упрощает и ускоряет решение.

3. В третьих случаях упрощение получается несомненное (тень на шаре).

4. В четвертых случаях только метод наивыгоднейшего проектирования имеет исключительную простоту и дает возможность решения предложенной задачи (пример 5 и 6).

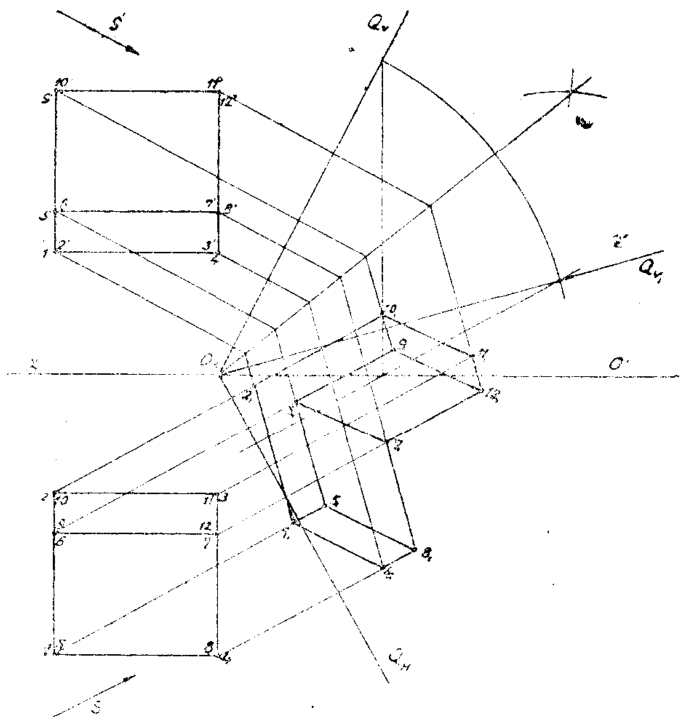

Рис. 12

В заключение можно отметить, что совместное применение обоих методов несомненно поможет разрешать ряд вопросов начертательной геометрии более просто и быстро.

ЗАМЕЧЕННЫЕ ОПЕЧАТКИ

Стр.	Строка	Напечатано	Следует читать
235	22 снизу	[1—4]	[1—12]
235	19 снизу	[4]	[12]
235	5 снизу	[5]	[13]
236	14 сверху	[6]	[14]
239	10 сверху	[4]	[12]
240	5 сверху	[7]	[15]
241	3 сверху	$I_a =$	$I_p =$