

ПРОГРЕВ ТЕЛ ПОД ДЕЙСТВИЕМ ЛУЧИСТОГО ТЕПЛА (Сообщение второе)

Г. П. БОЙКОВ

В работе рассматривается прогрев тел классической формы при граничных условиях типа 2-го рода, когда теплообмен происходит по закону Стефана-Больцмана и лучистый поток симметричен.

Излагается метод зонального (во времени) расчета температурного поля при распространении тепла в одном измерении с учетом переменности термических характеристик вещества.

Даются расчетные зависимости и соотношения.

В сообщении первом по этому же вопросу (см. сообщение первое) были даны соотношения, дающие возможность рассчитать температурное поле при прогреве тел классической формы. В этих соотношениях полагалось, что термические характеристики вещества λ , c , ε не зависят от температуры и остаются неизменными на протяжении всего процесса прогрева. Такое допущение в значительной мере снижает практическую ценность полученных результатов, несмотря на их математическую строгость, так как в действительности термические характеристики вещества λ (теплопроводность), c (теплоемкость), ε (степень черноты поверхности) не остаются постоянными в процессе прогрева тела, а как-то изменяются с изменением температуры последнего. Поэтому в предлагаемой работе делается попытка дать метод расчета температурного поля, позволяющий до некоторой степени учесть переменность термических характеристик вещества в функции от температуры тела.

Пусть имеем неограниченную пластину толщиной $2R$ при температуре T_0 . Предположим также, что заданы законы:

$$\lambda = f_\lambda(t) \quad (a)$$

$$c = f_c(t) \quad (б)$$

$$\varepsilon = f_\varepsilon(t) \quad (в)$$

В первый момент времени пластина помещается между двумя неограниченными параллельными источниками тепла, температура которых изменяется по закону

$$T_c = f_c(\tau) \quad (г)$$

Найдем распределение температуры по толщине пластины через различные моменты времени. Определяем вначале распределение температуры по истечении достаточно малого отрезка времени τ_1 от начала прогрева, для чего предварительно находим:

$$\left. \begin{aligned} \lambda_1 &= f_\lambda(t_0) \\ c_1 &= f_c(t_0) \end{aligned} \right\} a_1 = f_a(\lambda_1, c_1)$$

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_1 &= f_\varepsilon(t_0) \\ \varepsilon_2 &= f_\varepsilon(t_{c_1}) \end{aligned} \right\} \varepsilon_{n_1} = f_{\varepsilon n}(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$$

$$T_{c_1} = f_c(0),$$

которые считаем неизменными на протяжении этого первого отрезка времени, после чего решаем систему уравнений:

$$\frac{\partial T(x, \tau)}{\partial \tau} = a_1 \cdot \frac{\partial^2 T(x, \tau)}{\partial x^2}; \quad (1)$$

$$T(x, 0) = T_0; \quad (2)$$

$$\frac{\partial T(R, \tau)}{\partial x} = \frac{\varepsilon_{n_1} \cdot C_0}{\lambda_1} \cdot \left[\left(\frac{T_{c_1}}{100} \right)^4 - \left(\frac{T_0}{100} \right)^4 \right] = \frac{g_{c_1}}{\lambda_1}; \quad (3)$$

$$\frac{\partial T(0, \tau)}{\partial x} = 0. \quad (4)$$

Решение системы (1)–(4) имеется в литературе (см. [5], [6]) в виде:

$$T(x, \tau) = T_0 + \frac{g_{c_1}}{\lambda_1} \left[\frac{a_1 \tau}{R} - \frac{R^2 - 3x^2}{6R} + R \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{2}{\mu_n^2} \cdot \cos \left(\mu_n \frac{x}{R} \right) e^{-\mu_n^2 \frac{a_1 \tau}{R^2}} \right].$$

Распределение температуры по истечении первого интервала времени от начала прогрева будет

$$T_1(x) = T_0 + \frac{g_{c_1}}{\lambda_1} \left[\frac{a_1 \tau_1}{R} - \frac{R^2 - 3x^2}{6R} + R \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{2}{\mu_n^2} \cdot \cos \left(\mu_n \frac{x}{R} \right) \cdot e^{-\mu_n^2 \frac{a_1 \tau_1}{R^2}} \right]. \quad (D)$$

Используя выражение (D), находим температуру на поверхности пластины

$$T_1(R) = T_0 + \frac{g_{c_1}}{\lambda_1} \left[\frac{a_1 \tau_1}{R} + \frac{1}{3} R - R \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{\mu_n^2} e^{-\mu_n^2 \frac{a_1 \tau_1}{R^2}} \right]$$

и среднюю температуру всей массы пластины

$$t_1^{cp} = \frac{1}{R} \int_0^R t_1(x) dx = t_0 + \frac{a_1 \tau_1}{\lambda_1 R} \cdot g_{c_1},$$

установившиеся по истечении первого отрезка времени τ_1 от начала прогрева.

Далее, используя соотношения (а), (б), (в), (г), находим

$$\begin{aligned}\lambda_2 &= f_\lambda(t_1^{cp}) & \varepsilon_1 &= f_\varepsilon[t_1(R)]; \\ c_2 &= f_c(t_1^{cp}) & \varepsilon_2 &= f_2(t_{c_2}); \\ a_2 &= f_a(\lambda_2; c_2) & \varepsilon_{n_2} &= f_{\varepsilon n}(\varepsilon_1; \varepsilon_2); \\ T_{c_2} &= f_c(\tau_1),\end{aligned}$$

которые считаем неизменными на протяжении второго такого же интервала времени τ_1 .

Определим теперь температурное поле в пластине по истечении второго промежутка времени τ_1 , для чего решим систему уравнений ¹⁾:

$$\frac{\partial T(x, \tau)}{\partial \tau} = a_2 \cdot \frac{\partial^2 T(x, \tau)}{\partial x^2}; \quad (5)$$

$$\begin{aligned}T(x, 0) &= T_0 + \frac{g_{c_1}}{\lambda_1} \left[\frac{a_1 \tau_1}{R} - \frac{R^2 - 3x^2}{6R} + R \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \cdot \right. \\ &\quad \left. \frac{2}{\mu_n^2} \cdot \cos\left(\mu_n \frac{x}{R}\right) e^{-\mu_n^2 \frac{a_1 \tau_1}{R^2}} \right]; \quad (6)\end{aligned}$$

$$\frac{\partial T(R, \tau)}{\partial x} = \frac{\varepsilon_{n_2} \cdot C_0}{\lambda_2} \left[\left(\frac{T_{c_2}}{100} \right)^4 - \left(\frac{T_1(R)}{100} \right)^4 \right] = \frac{g_{c_2}}{\lambda_2}; \quad (7)$$

$$\frac{\partial T(0, \tau)}{\partial x} = 0. \quad (8)$$

Применяя преобразование Лапласа вида $F(s) = \int_0^{\infty} T(x, \tau) e^{-s\tau} \cdot d\tau$ к дифференциальному уравнению (5) и учитывая (6), получим:

$$T''(x, s) - \frac{s}{a_2} \cdot T(x, s) + \frac{A}{a_2} + \frac{Bx^2}{a_2} + \frac{C}{a_2} \cdot \cos\left(\mu_n \frac{x}{R}\right) = 0, \quad (9)$$

где

$$A = T_0 + \frac{g_{c_1}}{\lambda_1} \cdot \frac{a_1 \tau_1}{R} - \frac{g_{c_1} \cdot R^2}{6\lambda_1 \cdot R};$$

$$B = \frac{3g_{c_1}}{6\lambda_1 \cdot R};$$

$$C = \frac{g_{c_1} \cdot R}{\lambda_1} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{2}{\mu_n^2} \cdot e^{-\mu_n^2 \frac{a_1 \tau_1}{R^2}}.$$

Применяя преобразование Лапласа вида

$$\Phi(S) = \int_0^{\infty} T(x, s) \cdot e^{-Sx} \cdot dx$$

1) См. [1], [5], [6], [12].

к выражению (9) после ряда алгебраических преобразований, будем иметь:

$$\begin{aligned} \Phi(S, s) = & \frac{S \cdot T(0, s)}{\left[S^2 - \left(\sqrt{\frac{s}{a_2}} \right)^2 \right]} + \frac{T'(0, s)}{\sqrt{\frac{s}{a_2}}} \cdot \frac{\sqrt{\frac{s}{a_2}}}{\left[S^2 - \left(\sqrt{\frac{s}{a_2}} \right)^2 \right]} \\ & - \frac{A}{a_2} \cdot \frac{1}{S \left[S^2 + \left(\sqrt{\frac{s}{a_2}} \right)^2 \right]} - \frac{C}{a_2} \cdot \frac{S}{\left[S^2 + \left(\frac{\mu_n}{R} \right)^2 \right] \cdot \left[S^2 + \left(\sqrt{\frac{s}{a_2}} \right)^2 \right]} \\ & - \frac{B}{a_2} \cdot \frac{\Gamma(3)}{S^3} \cdot \frac{1}{\sqrt{\frac{s}{a_2}}} \cdot \frac{\sqrt{\frac{s}{a_2}}}{\left[S^2 - \left(\sqrt{\frac{s}{a_2}} \right)^2 \right]} \end{aligned} \quad (10)$$

Применяя к выражению (10) формулу обращения Римана-Мелина вида:

$$f(x) = L^{-1} [F(S)] = \frac{1}{2\pi i} \cdot \int_{\sigma - i\infty}^{\sigma + i\infty} e^{S \cdot x} \cdot F(S) \cdot dS,$$

найдем

$$\begin{aligned} T(x, s) = & A_2 \cdot Ch \left(\sqrt{\frac{s}{a_2}} \cdot x \right) + B_2 \cdot Sh \left(\sqrt{\frac{s}{a_2}} \cdot x \right) + \frac{A}{s} + \frac{Bx^2}{s} + \\ & + \frac{2a_2 \cdot B}{s^2} + \frac{C}{a_2} \cdot \frac{\cos \left(\mu_n \frac{x}{R} \right)}{\frac{s}{a_2} + \left(\frac{\mu_n}{R} \right)^2}, \end{aligned}$$

где (A_2) и (B_2) — постоянные, определяемые из условий (8) и (7). По условию симметрии (8) $B_2 = 0$.

Из граничного условия (7) находим:

$$A_2 = \frac{g_{c_2} - 2BR\lambda_2}{\lambda_2 \cdot s \sqrt{\frac{s}{a_2}} \cdot sh \left(\sqrt{\frac{s}{a_2}} \cdot R \right)}.$$

Решение для изображения теперь представится как

$$T(x, s) = \frac{A}{s} + \frac{Bx^2}{s} + \frac{2a_2 \cdot B}{s^2} + \frac{C}{a_2} \cdot \frac{\cos \left(\mu_n \frac{x}{R} \right)}{\frac{s}{a_2} + \left(\frac{\mu_n}{R} \right)^2} +$$

$$+ \frac{\left(g_{c_2} - 2\lambda_2 BR \right) \cdot \text{Ch} \left(\sqrt{\frac{s}{a_2}} \cdot x \right)}{\lambda_2 \cdot s \cdot \sqrt{\frac{s}{a_2}} \cdot \text{Sh} \left(\sqrt{\frac{s}{a_2}} \cdot R \right)}; \quad (11)$$

Применяя обратное преобразование к изображению (11) и заменяя A, B, C их значениями, найдем оригинал в виде:

$$\begin{aligned} T(x, \tau) = & T_0 + \frac{g_{c_1}}{\lambda_1} \left[\frac{a_1 \tau_1}{R} - \frac{R^2 - 3x^2}{6R} + \frac{a_2 \tau}{R} + \right. \\ & + R \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{2}{\mu_n^2} \cdot \cos \left(\mu_n \frac{x}{R} \right) \cdot e^{-\mu_n^2 \frac{a_1 \tau_1}{R^2}} \cdot e^{-\mu_n^2 \frac{a_2 \tau}{R^2}} \left. + \right. \\ & + \left(\frac{g_{c_2}}{\lambda_2} - \frac{g_{c_1}}{\lambda_1} \right) \cdot \left[\frac{a_2 \tau}{R} - \frac{R^2 - 3x^2}{6R} + \right. \\ & \left. + R \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{2}{\mu_n^2} \cdot \cos \left(\mu_n \frac{x}{R} \right) \cdot e^{-\mu_n^2 \frac{a_2 \tau}{R^2}} \right]. \quad (12) \end{aligned}$$

Подставив вместо τ значение τ_1 после преобразований, получим распределение температуры по истечении второго отрезка времени от начала прогрева, так же равного τ_1 :

$$\begin{aligned} T_2(x) = & T_0 + \frac{a_1 \tau_1}{R} \cdot \left(\frac{g_{c_1}}{\lambda_1} + \frac{g_{c_2}}{\lambda_1} \cdot \frac{c_1}{c_2} \right) - \frac{g_{c_2}}{\lambda_2} \cdot \frac{R^2 - 3x^2}{6R} + \\ & + R \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \cdot \frac{2}{\mu_n^2} \cdot \text{Cos} \left(\mu_n \frac{x}{R} \right) \left[\frac{g_{c_1}}{\lambda_1} \cdot e^{-\mu_n^2 \left(\frac{a_1 \tau_1}{R^2} + \frac{a_2 \tau_1}{R^2} \right)} - \right. \\ & \left. - \left(\frac{g_{c_1}}{\lambda_1} - \frac{g_{c_2}}{\lambda_2} \right) \cdot e^{-\mu_n^2 \frac{a_2 \tau_1}{R^2}} \right]. \quad (13) \end{aligned}$$

Используя выражение (13), находим температуру на поверхности пластины

$$\begin{aligned} T_2(R) = & T_0 + \frac{a_1 \tau_1}{R} \left(\frac{g_{c_1}}{\lambda_1} + \frac{g_{c_2}}{\lambda_1} \cdot \frac{c_1}{c_2} \right) + \frac{1}{3} R \frac{g_{c_2}}{\lambda_2} - R \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{\mu_n^2} \cdot \\ & \cdot \left[\frac{g_{c_1}}{\lambda_1} \cdot e^{-\mu_n^2 \left(\frac{a_1 \tau_1}{R^2} + \frac{a_2 \tau_1}{R^2} \right)} - \left(\frac{g_{c_1}}{\lambda_1} - \frac{g_{c_2}}{\lambda_2} \right) \cdot e^{-\mu_n^2 \frac{a_2 \tau_1}{R^2}} \right] \end{aligned}$$

и среднюю температуру всей массы пластины

$$t_2^{cp} = \frac{1}{R} \int_0^R t_2(x) dx = t_0 + \frac{a_1 \tau_1}{\lambda_1 \cdot R} \left(g_{c_1} + g_{c_2} \cdot \frac{c_1}{c_2} \right),$$

которые установятся (от начала прогрева) по истечении второго интервала времени, равного τ_1 .

Далее, используя соотношения (а), (б), (в), (г), находим λ_3 ; c_3 ; a_3 ; T_{c_3} ; ε_{n_3} , которые считаем неизменными на протяжении третьего такого же

отрезка времени τ_1 . Затем, решая опять соответствующую систему дифференциальных уравнений, определяем $T_3(x)^*$ и т. д.

Проделав аналогичные рассуждения для $T_4(x)$; $T_5(x)$, убеждаемся, что распределение температуры по истечении любого (m -го) момента времени представится соотношением:

$$\begin{aligned} \frac{T_m(x)}{T_c} = & \frac{T_0}{T_c} + \frac{g_c \cdot R}{\lambda_1 \cdot T_c} \cdot \left\{ \frac{a_1 \tau_1}{R^2} \sum_{i=1}^{i=m} \frac{g_{c_i}}{g_c} \cdot \frac{c_1}{c_i} - \frac{g_{c_m}}{g_c} \cdot \frac{\lambda_1}{\lambda_m} \right. \\ & \cdot \frac{\dot{R}^2 - 3x^2}{6R^2} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \cdot \frac{2}{\mu_n^2} \cdot \cos\left(\mu_n \frac{x}{R}\right) \cdot \left[\frac{g_{c_1}}{g_c} \cdot e^{-\mu_n^2} \sum_{i=1}^{i=m} \frac{a_i \tau_1}{R^2} - \right. \\ & - \left(\frac{g_{c_1}}{g_c} - \frac{g_{c_2}}{g_c} \cdot \frac{\lambda_1}{\lambda_2} \right) \cdot e^{-\mu_n^2} \sum_{i=2}^{i=m} \frac{a_i \tau_1}{R^2} - \left(\frac{g_{c_2}}{g_c} \cdot \frac{\lambda_1}{\lambda_2} - \right. \\ & - \left. \frac{g_{c_2}}{g_c} \cdot \frac{\lambda_1}{\lambda_3} \right) \cdot e^{-\mu_n^2} \sum_{i=3}^{i=m} \frac{a_i \tau_1}{R^2} - \dots \\ & \left. \left. \dots - \left(\frac{g_{c(m-1)}}{g_c} \cdot \frac{\lambda_1}{\lambda_{(m-1)}} - \frac{g_{c_m} \cdot \lambda_1}{g_c \cdot \lambda_m} \right) \cdot e^{-\mu_n^2} \frac{a_m \tau_1}{R^2} \right] \right\}; \end{aligned} \quad (14)$$

Здесь T_c и g_c взяты при $\tau = 0$.

В критериальном виде** выражение (14) запишется как

$$\begin{aligned} \theta_m = & \theta_0 + K_i \left\{ F_{0i} \cdot \sum_{i=1}^{i=m} Q_{c_i} \cdot C_i - Q_{c_m} \cdot \Lambda_m \frac{1}{6} (1 - 3X^2) \right\} + \\ & + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{2}{\mu_n^2} \cdot \cos(\mu_n \cdot X) \cdot \left[Q_{c_1} \cdot e^{-\mu_n^2} \sum_{i=1}^{i=m} F_{0i} - (Q_{c_1} - \right. \\ & - Q_{c_2} \cdot \Lambda_2) \cdot e^{-\mu_n^2} \sum_{i=2}^{i=m} F_{0i} - (Q_{c_2} \cdot \Lambda_2 - Q_{c_3} \cdot \Lambda_3) \cdot \\ & \left. \cdot e^{-\mu_n^2} \sum_{i=3}^{i=m} F_{0i} - \dots - (Q_{c(m-1)} \cdot \Lambda_{(m-1)} - Q_{c_m} \cdot \Lambda_m) e^{-\mu_n^2} F_{0m} \right] \end{aligned} \quad (15).$$

Следует отметить, что ряд $\sum_{n=1}^{\infty}$ в выражениях (14) и (15) (третий член в фигурных скобках) быстро сходится. Поэтому, начиная с некоторого момента времени ($m > 1$), им можно пренебречь и дальнейший расчет вести с учетом лишь первых двух членов в фигурных скобках, что значительно его упрощает.

Примечание: Если в выражениях (14) и (15) положить $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_m$ и $c_1 = c_2 = \dots = c_m$, то последние примут вид расчетных формул для случая постоянных термических характеристик (см. сообщение первое).

*См. также [9], [10].

**См. [4], [11], [12].

Если прогреваемая пластина относится к классу „тонких“ тел* ($K_i < 0, 12$), имеющих незначительный температурный перепад между поверхностью и серединой тела, то более целесообразно вести расчеты по средней температуре тела, определяемой из соотношения

$$\frac{T_m^{cp}}{T_c} = \frac{1}{R} \int_0^R \frac{T_m(x)}{T_c} \cdot dx = \frac{T_0}{T_c} + \frac{g_c \cdot R}{\lambda_1 \cdot T_c} \cdot \frac{a_1 \tau_1}{R^2} \sum_{i=1}^{i=m} \frac{g_{c_i}}{g_c} \cdot \frac{c_1}{c_i}; \quad (16)$$

или в критериальной форме

$$\Theta_m^{cp} = \Theta_0 + K_i \cdot F_{o_1} \cdot \sum_{i=1}^{i=m} Q_{c_i} \cdot C_i; \quad (17)$$

Удельный расход тепла на прогрев пластины может быть определен по формуле

$$\Delta g_s^m = \tau_1 \sum_{i=1}^{i=m} g_{c_i}. \quad (18)$$

Для правильного выбора расчетного интервала времени τ_1 (см. сообщение первое), например для пластины, требуется выполнить следующую последовательность:

1. Предварительное определение расчетного интервала времени по приближенной зависимости

$$\tau_1 = \frac{0,03 \cdot \lambda_1 \cdot T_c \cdot R}{g_c \cdot a_1}. \quad (19)$$

2. Проверка найденного из зависимости (19) расчетного интервала времени путем оценки приближения, выраженной неравенством

$$\frac{g_{c_{учт}} - g_{c_2}}{g_{c_1}} = \varphi_m \leq 1 - \frac{a_2}{a_1} \left\{ 1 - \frac{3 \left(g_{c_1} - g_{c_2} \frac{\lambda_1}{\lambda_2} \right)}{g_{c_1} \left[1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\frac{2}{n} \frac{a_1 \tau_1}{R^2}} \right]} \right\}. \quad (20)$$

здесь φ_m — действительная погрешность расчета.

Не исключена возможность, что численный результат правой части неравенства (20) может оказаться отрицательным числом (частный случай, зависящий от законов вещества $\lambda = f(t)$; $c = \psi(t)$, а также от критерия

$$F_{o_1} = \frac{a_1 \tau_1}{R^2}). \text{ В этом случае знак минус можно не принимать во внимание,}$$

т. е. полученное значение считать положительным, а под величиной φ_m в левой части неравенства понимать отношение $\varphi_m = \frac{g_{c_2} - g_{c_{учт}}}{g_{c_1}}$.

Выражения, аналогичные соотношениям (14) — (20), для цилиндра имеют вид:

$$\frac{T_m(r)}{T_c} = \frac{T_0}{T_c} + \frac{g_c \cdot R}{\lambda_1 \cdot T_c} \left\{ 2 \frac{a_1 \tau_1}{R^2} \sum_{i=1}^{i=m} \frac{g_{c_i}}{g_c} \cdot \frac{c_1}{c_i} - \frac{1}{4} \cdot \frac{g_{c_m}}{g_c} \cdot \frac{\lambda_1}{\lambda_m} \right\}.$$

*) 0 „тонких“ телах см. [3], [7].

$$\begin{aligned}
& \cdot \left(1 - 2 \frac{r^2}{R^2} \right) - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{\mu_n^2 \cdot J_0(\mu_n)} \cdot J_0\left(\mu_n \frac{r}{R}\right) \cdot \left[\frac{g_{c1}}{g_c} \cdot e^{-\mu_n^2 \sum_{i=1}^{i=m} \frac{a_i \tau_1}{R^2}} - \right. \\
& \left. - \sum_{i=1}^{i=m-1} \left(\frac{g_{c_i} \lambda_1}{g_c \cdot \lambda_i} - \frac{g_{c(i+1)} \cdot \lambda_1}{g_c \cdot \lambda_{(i+1)}} \right) \cdot e^{-\mu_n^2 \sum_{\kappa=1}^{\kappa=m-i} \frac{a_{(i+\kappa)} \tau_1}{R^2}} \right] \quad ; \quad (14')
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\theta_m = \theta_0 + K_i \left\{ 2F_{01} \sum_{i=1}^{i=m} Q_{c_i} \cdot C_i - \frac{1}{4} Q_{c_m} \Lambda_m \cdot (1 - 2r^2) - \right. \\
\left. - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{\mu_n^2 \cdot J_0(\mu_n)} \cdot J_0(\mu_n \cdot r) \cdot \left[Q_{c_1} \cdot e^{-\mu_n^2 \sum_{i=1}^{i=m} F_{0i}} - \right. \right. \\
\left. \left. - \sum_{i=1}^{i=m-1} \left(Q_{c_i} \Lambda_i - Q_{c(i+1)} \cdot \Lambda_{(i+1)} \right) \cdot e^{-\mu_n^2 \sum_{\kappa=1}^{\kappa=m-i} F_{0(i+\kappa)}} \right] \right\} \quad ; \quad (15')
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{T_m^{cp}}{T_c} &= \frac{2}{R^2} \int_0^R r \cdot \frac{T_m(r)}{T_c} \cdot dr = \\
&= \frac{T_0}{T_c} + 2 \frac{g_c R}{\lambda_1 \cdot T_c} \cdot \frac{a_1 \tau_1}{R^2} \cdot \sum_{i=1}^{i=m} \frac{g_{c_i}}{g_c} \cdot \frac{c_1}{c_i} \quad ; \quad (16)
\end{aligned}$$

$$\theta_m^{cp} = \theta_0 + 2K_i \cdot F_{01} \sum_{i=1}^{i=m} Q_{c_i} \cdot C_i \quad ; \quad (17)$$

$$\Delta g_v^m = \frac{2}{R} \cdot \tau_1 \cdot \sum_{i=1}^{i=m} g_{c_i} \quad ; \quad (18)$$

$$\tau_1 = \frac{0,025 \cdot \lambda_1 \cdot T_c \cdot R}{g_c a_1} \quad ; \quad (19)$$

$$\varphi_m \leq 1 - \frac{a_2}{a_1} \left\{ 1 - \frac{2 \left(g_{c1} - g_{c1} \frac{\lambda_1}{\lambda_2} \right)}{g_{c1} \cdot \left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\mu_n^2 \frac{a_1 \tau_1}{R^2}} \right]} \right\}. \quad (20')$$

Аналогичные выражения могут быть написаны и для шара.

На рисунках 1, 2, 3, 4 показан прогрев цилиндра при различных условиях. Зависимости $\lambda = f_\lambda(t)$ и $c = f_c(t)$ заимствованы из работы А. Л. Немчинского [7]. Опытные данные взяты согласно [2], [7], [8].

Рис. 1
Прогрев цилиндра из шарикоподшипниковой стали
 $d = 125$ мм

— · — · — расчетные данные температуры на поверхности по формуле № 14' с учетом переменности термических констант вещества при $\epsilon_n \cdot Co = 4$.
— — — — расчетные данные температуры на поверхности по формуле № 14' без учета переменности термических констант вещества при $\epsilon_n \cdot Co = 4$.
— — — — расчетные данные температуры на поверхности по таблицам Рассела при $\alpha_{изл} = 230$.
· · · · · опытная кривая температуры на поверхности по данным Доброхотова Н. Н.

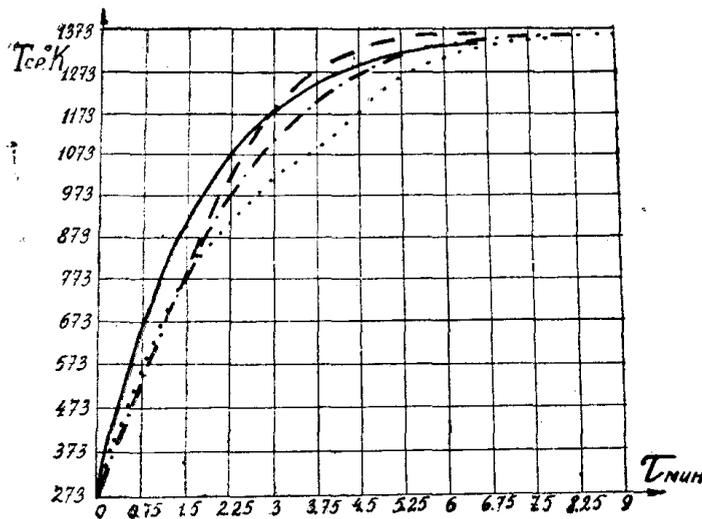
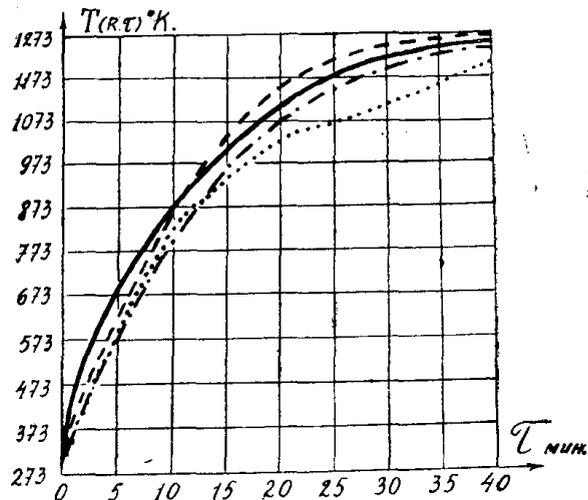


Рис. 2. Прогрев цилиндра из углеродистой стали
(0,4%С) $d = 25$ мм

— · — · — расчетные данные средней температуры всей массы тела по формуле № 16' с учетом переменности термических констант вещества при $\epsilon_n \cdot Co = 3, 8$.
— — — — расчетные данные средней температуры всей массы тела по формуле № 16' без учета переменности термических констант вещества при $\epsilon_n \cdot Co = 3, 8$.
— — — — расчетные данные средней температуры всей массы тела по конвективной формуле А. В. Лыкова при $\alpha_{изл} = 210$.
· · · · · опытная кривая средней температуры всей массы тела по данным В. Н. Соколова.

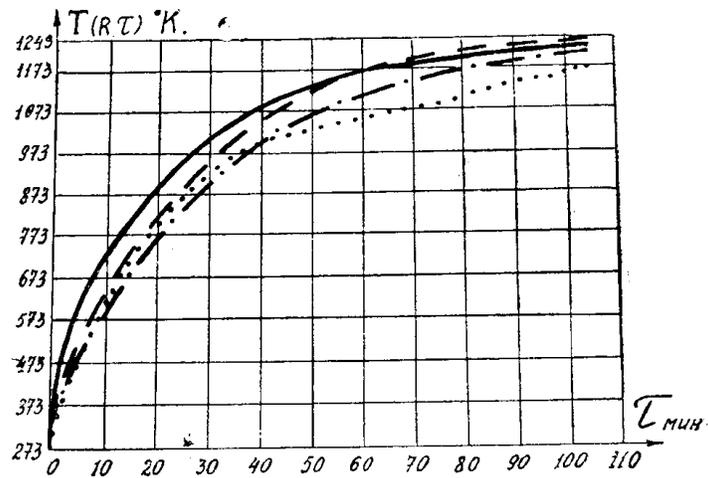


Рис. 3. Прогрев цилиндра из стали 9Х, $d = 300$ мм
 — — — — расчетные данные температуры на поверхности по формуле № 14' с учетом переменности термических констант вещества при $\epsilon_n \cdot C_0 = 4$.
 — — — — расчетные данные температуры на поверхности по формуле № 14' без учета переменности термических констант вещества при $\epsilon_n \cdot C_0 = 4$.
 — — — — расчетные данные температуры на поверхности по графикам Д. В. Будрина при $\alpha_{изл} = 220$.
 опытная кривая температуры у поверхности цилиндра по данным В. М. Дегтярева.

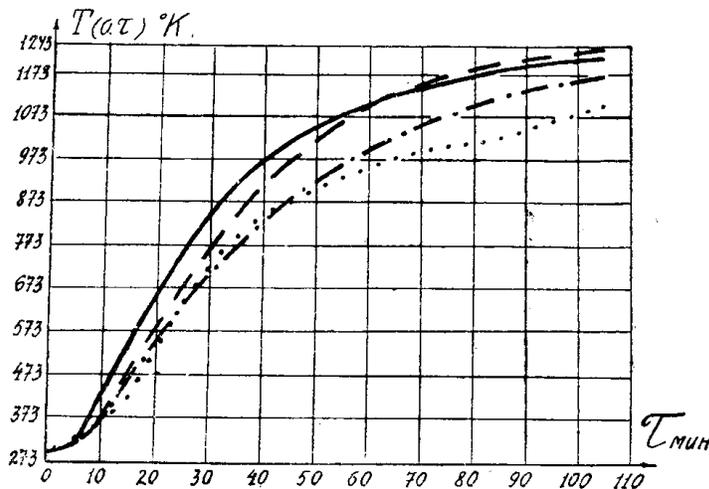


Рис. 4. Прогрев цилиндра из стали 9Х, $d = 300$ мм
 — — — — расчетные данные температуры в центре по формуле № 14' с учетом переменности термических констант вещества при $\epsilon_n \cdot C_0 = 4$.
 — — — — расчетные данные температуры в центре по формуле № 14' без учета переменности термических констант вещества при $\epsilon_n \cdot C_0 = 4$.
 — — — — расчетные данные температуры центра по формулам и таблицам Хейлигенштедта при $\alpha_{изл} = 225$.
 опытная кривая температуры центра по данным В. М. Дегтярева.

ЛИТЕРАТУРА

1. Дидкин В. А. и Кузнецов Н. И. — Справочник по операционному исчислению, ГИТТЛ, М.—Л., 1951.
 2. Дегтярев В. М. — Скоростной нагрев при термической обработке изделий крупных сечений, ГНТИМЛ, К.—М., 1953.
 3. Иванцов Г. П. — Нагрев металлов, Metallurgizdat, M., 1948.
 4. Кирпичев М. В., Михеев М. А., Эйгенсон Л. С. — Теплопередача, ГЭИ, М., 1940.
 5. Лыков А. В. — Теплопроводность нестационарных процессов, ГИТТЛ, М.—Л., 1948.
 6. Лыков А. В. — Теория теплопроводности, ГИТТЛ, М., 1952.
 7. Немчинский А. Л. — Тепловые расчеты термической обработки, Судпромгиз, 1953.
 8. Соколов В. Н. — Исследование нагрева кузнечных заготовок, Сборник статей под редакцией Копытова В. Ф.; Нагрев стали и печи, Metallurgizdat, M., 1949.
 9. Тайц Н. Ю. — Технология нагрева стали, Metallurgizdat, M., 1950.
 10. Шваб В. А. — Нестационарные температурные поля в твердых телах при изменяющихся граничных условиях, Вестник инженеров и техников, 3, 1935.
 11. Эйгенсон Л. С. — Моделирование, ГИ „Советская наука“, М., 1952.
 12. Бойков Г. П. — Прогрев тел под действием лучистого тепла (диссертация), Томск 1955.
-