ИЗВЕСТИЯ
ТОМСКОГО ОРДЕНА ТРУДОВОГО КРАСНОГО ЗНАМЕНИ ПОЛИТЕХНИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА имени С. М. КИРОВА
Том 93 1958 г.

ОБОБЩЕННЫЕ ЗАКОНЫ ГАУССА

Б. Ф. КРУТОЙ

(Представлено научным семинаром кафедр маркшейдерского дела и геодезии)

Обозначим через

$$\text{Вер}\,(\xi = x) = \varphi(x)$$

вероятность того, что измеренное значение независимой случайной величины ξ будет равно x. Эта вероятность хорошо согласуется с опытом, если ее подсчитывать в соответствии с точечным законом Гаусса [1]

$$\text{Вер}\,(\xi = x) = \varphi(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{(x-c)^2}{2\sigma^2}}\,. \tag{1}$$

Закон Гаусса (1) выражается кривой, изображенной на рис. 1.

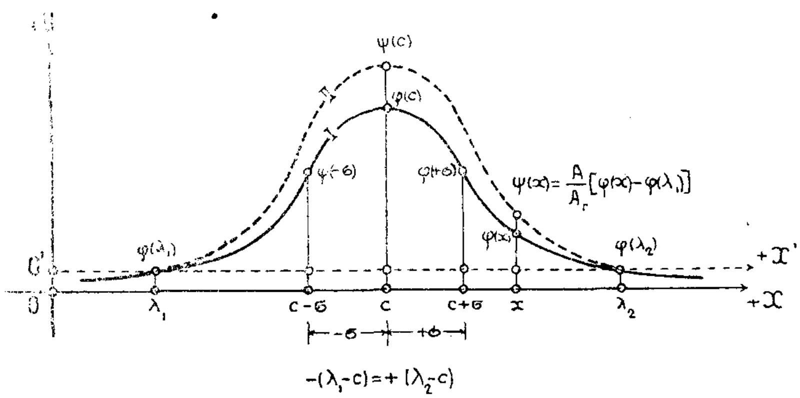

Рис. 1. Кривые законов Гаусса: обычных (I) и обобщенных (II)

Входящие в (1) величины c и σ—параметры, устанавливаемые предельными равенствами

$$c = C\xi = \underset{n\to\infty}{пред.}\frac{\sum_{i=1}^{n}\tilde{x}_i}{n}, \qquad \sigma^2 = C[\xi - C\xi]^2 = \underset{n\to\infty}{пред.}\frac{\sum_{i=1}^{n}(\tilde{x}_i - c)^2}{n}, \tag{2}$$

где C—знак среднего значения переменной величины, а $\tilde{x}_i$—одно из возможных значений случайной величины ξ. Параметр c называется **средним значением** случайной величины ξ, а параметр σ — **средним разбросом** случайной величины ξ.

В действительных наблюдениях вместо возможных значений $\tilde{x}_i$ случайной величины ξ мы получаем ее измеренные значения x_i, причем число наблюдений n всегда ограничено. В этом случае параметры c и σ, входящие в (1) и определяемые предельными равенствами (2), заменяются их наблюденными значениями $c_{наб} = \bar{x}$ и $\sigma_{наб} = m$, которые находятся следующим образом:

$$c_{наб} = \bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i, \qquad \sigma^2_{наб} = m^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2. \tag{2a}$$

Вместо же (1) мы получим тогда приближенно

$$\text{Вер}(\xi = x) = \varphi(x) \approx \frac{1}{m\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\bar{x})^2}{2m^2}}. \tag{1a}$$

Обозначим далее через

$$\text{Вер}(x_1 \leqslant \xi \leqslant x_2) = \Phi(x_1, x_2)$$

вероятность того, что измеренное значение независимой случайной величины ξ будет заключено в границах $(x_1 \leqslant \xi \leqslant x_2)$, где x_1, x_2 — заданные наперед числа. Тогда расчеты показывают, что если Вер $(\xi = x)$ при x переменном следует точечному закону Гаусса (1), то вероятность нахождения ξ в пределах $(x_1 \leqslant \xi \leqslant x_2)$ определяется интегральным законом Гаусса

$$\text{Вер}(x_1 \leqslant \xi \leqslant x_2) = \Phi(x_1, x_2) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{x_1}^{x_2} e^{-\frac{(z-c)^2}{2\sigma^2}} dz, \tag{3}$$

где переменное x обозначено через z. Вставляя в (3) вместо параметров c, σ их наблюденные значения $\bar{x} = \bar{z}$ и m, вычисленные согласно (2 a), мы вместо (3) будем иметь следующее приближенное равенство:

$$\text{Вер}(x_1 \leqslant \xi \leqslant x_2) = \Phi(x_1, x_2) \approx \frac{1}{m\sqrt{2\pi}} \int_{x_1}^{x_2} e^{-\frac{(z-\bar{z})^2}{2m^2}} dz. \tag{3a}$$

Вопрос о вычислении интегралов вида (3) или (3 a) рассмотрим несколько позже.

Выясним происхождение множителя $(\sigma\sqrt{2\pi})^{-1}$, входящего в основные равенства (1) и (3). С этой целью напомним некоторые особенности данного Гауссом вывода его интегрального соотношения (3), [2].

При выводе равенства (3) Гаусс исходит из Вер $(\xi = x)$, заданной в более общем, чем (1), виде

$$\text{Вер}(\xi = x) = \varphi(x) = Ae^{-\frac{(x-c)^2}{2\sigma^2}}, \tag{1б}$$

где множитель A есть неизвестная пока величина, определяемая под каким-нибудь дополнительным условием. Поэтому вместо (3) мы имеем первоначально для Вер $(x_1 \leqslant \xi \leqslant x_2)$ следующее общее выражение:

$$\text{Вер}(x_1 \leqslant \xi \leqslant x_2) = \Phi(x_1, x_2) = A\int_{x_1}^{x_2} e^{-\frac{(z-c)^2}{2\sigma^2}}\, dz. \tag{3б}$$

Множитель A, входящий в (3б), Гаусс находит из того соображения, что при $x_1 = -\infty$, $x_2 = +\infty$

$$\text{Вер}(-\infty < \xi < +\infty) = \Phi(-\infty, +\infty) = 1.$$

Отсюда для определения неизвестного A получаем очень простое уравнение

$$A\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(z-c)^2}{2\sigma^2}}\, dz = 1. \tag{a}$$

Вводя здесь подстановку

$$\frac{z-c}{\sigma} = t$$

и учитывая четность подинтегральной функции, будем иметь вместо (a)

$$2\sigma A\int_{0}^{\infty} e^{-\frac{t^2}{2}}\, dt = 1. \tag{б}$$

Но, как известно,

$$\int_{0}^{\infty} e^{-\frac{t^2}{2}}\, dt = \frac{\sqrt{2\pi}}{2}.$$

Поэтому для множителя A Гаусс получает из (б) следующее окончательное значение:

$$A = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} = A_r, \tag{4}$$

что согласуется с (1) и (3). Вместе с тем из (1) вытекает, что при $x_1 = -\infty$, $x_2 = +\infty$

$$\varphi(-\infty) = \varphi(+\infty) = e^{-\infty^2} = 0, \tag{1в}$$

то есть обе ветви гауссовской кривой (1) касаются оси X на бесконечности (рис. 1).

Обсудим указанную особенность гауссовской кривой (1). То обстоятельство, что точечный закон Гаусса (1), отвечающий этой кривой, дает для Вер$(\xi = x)$ значение 0 только при $x = \pm\infty$, противоречит нашему представлению о действительных границах возможных значений $\tilde{x}_i$ независимой случайной величины ξ при заданных условиях ее измерения. Большой производственный опыт убеждает нас, что при отсутствии грубых ошибок наши измерения дают для независимой случайной величины ξ ряд наблюденных значений x_i, не выходящих из довольно узких пределов $\lambda_1 < x_i < \lambda_2$, определяемых точностью приборов и влиянием внешней среды. Например, измеряя длину линии $d = 1000{,}0$ *м* в средних условиях 20-метровой лентой со шпильками, мы не можем допустить, что при отсутствии грубых промахов измеренные значения d_i длины d могут достигать предельной величины $\lambda_1 = 995{,}0$ *м* или $\lambda_2 = 1005{,}0$ *м*. Подобным же образом при измерении горизонтального угла $\gamma = 75°18'35''$ теодолитом с ценой отсчетного приспособления $\mu = 2''$ у горизонтального круга невозможно предположить, что при отсутствии грубых просчетов и в средних условиях видимости измеренные значения γ_i могут достигать предельной величины $\lambda_1 = 75°18'25''$ или $\lambda_2 = 75°18'45''$.

Из приведенных соображений с несомненностью вытекает, что в действительных условиях измерения независимой случайной величины ξ равенства

$$\text{Вер}(\xi = \lambda_1) = 0, \qquad \text{Вер}(\xi = \lambda_2) = 0$$

будут совершенно достоверными при значениях λ_1, λ_2, сильно разнящихся от $-\infty$, $+\infty$. Это свойство действительных измерений наводит на мысль заменить общеизвестные законы Гаусса, точечный (1) и интегральный (3), близкими к ним, но более верными законами. Основная особенность этих новых законов, которые мы назовем **обобщенными законами Гаусса**, будет заключаться в том, что в них значительно точнее, чем у самого Гаусса, устанавливаются те пределы λ_1, λ_2, которых наверняка не достигнут в действительных условиях измерения возможные значения $\tilde{x}_i$ независимой случайной величины ξ. Этим самым мы добьемся более точной оценки для степени надежности измеренных значений x_i случайной величины ξ. Ниже дается вывод соответствующих обобщенных законов Гаусса.

Пусть λ_1, λ_2—указанные выше пределы возможных значений $\tilde{x}_i$ независимой случайной величины ξ, подлежащей нашему измерению. Значит, в данных условиях измерения равенства

$$\text{Вер}(\xi = \lambda_1) = \psi(\lambda_1) = 0, \qquad \text{Вер}(\xi = \lambda_2) = \psi(\lambda_2) = 0 \tag{5}$$

являются совершенно точными, только вид функции ψ остается пока неустановленным. Несколько уточняя вид функции ψ, мы примем в соответствии с (1) и (3), что

$$\text{Вер}(\xi = x) = \psi(x) \tag{6}$$

$$\text{Вер}(x_1 \leqslant \xi \leqslant x_2) = \Psi(x_1, x_2) = \int_{x_1}^{x_2} \psi(z)\,dz, \tag{7}$$

где $\psi(x)$ — непрерывная и дифференцируемая функция от x. Кроме того, функция $\psi(x)$ должна обладать тем свойством, что для некоторых установленных из опыта значений $x_1 = \lambda_1$ и $x_2 = \lambda_2$ равенство

$$\text{Вер}(\lambda_1 \leqslant \xi \leqslant \lambda_2) = \Psi(\lambda_1 \lambda_2) = \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} \psi(z)\, dz = 1 \tag{8}$$

является совершенно точным. Значение этого условия очевидно.

Желая получить в дальнейшем законы распределения вероятностей независимой случайной величины ξ, близкие к гауссовским (1), (3) и удовлетворяющие условию (8), выберем пределы λ_1 и λ_2 таким образом, чтобы

$$-(\lambda_1 - c) = (\lambda_2 - c), \tag{9}$$

где $c = C\xi$ согласно (2). Учитывая (9), определим теперь функцию $\psi(x)$ соотношением

$$\psi(x) = \text{Вер}(\xi = x) = \varphi(x) - \varphi(\lambda_1) = \varphi(x) - \varphi(\lambda_2), \tag{10}$$

в котором функция $\varphi(x)$ устанавливается равенством (1*б*), выражающим точечный закон Гаусса в несколько обобщенном виде. Поэтому вместо (10) мы будем иметь более развернуто

$$\text{Вер}(\xi = x) = \psi(x) = Ae^{-\frac{(x-c)^2}{2\sigma^2}} - Ae^{-\frac{(\lambda_1-c)^2}{2\sigma^2}} =$$

$$= Ae^{-\frac{(x-c)^2}{2\sigma^2}} - Ae^{-\frac{(\lambda_2-c)^2}{2\sigma^2}}, \tag{10a}$$

где A — неопределенный пока множитель. Легко проверить, что заданная таким выражением функция $\psi(x)$ удовлетворяет также граничным условиям (5).

Соотношение (10*a*) при $A = (\sigma\sqrt{2\pi})^{-1} = A_Г$ дает, очевидно, ту же кривую Гаусса, что и уравнение (1), но только относит эту кривую к новой оси X', проходящей через точки с координатами $[\lambda_1, \varphi(\lambda_1)]$, $[\lambda_2, \varphi(\lambda_2)]$ в старой отсчетной опоре $XУ$ (рис. 1). Так как пределы λ_1, λ_2 были выбраны нами под условием (9), то $\varphi(\lambda_1) = \varphi(\lambda_2)$, и потому новая ось X' параллельна старой оси X, но располагается несколько выше ее.

Учитывая сказанное, отнесем гауссовскую кривую (1) к новой отсчетной опоре $X'У$, для которой согласно (5)

$$\psi(\lambda_1) = \psi(\lambda_2) = 0,$$

и рассмотрим часть этой кривой, содержащуюся между точками $(\lambda_1, 0)$, $(\lambda_2, 0)$ ее пересечения с осью X'. Так как гауссовская кривая (1) касается исходной оси X в точках $+\infty$, $-\infty$ и образует с этой осью площадь 1 — условие (*a*), то указанная выше часть гауссовской кривой (1) составит с соответствующим отрезком $[\lambda_1, \lambda_2]$ новой оси X' площадь, меньшую 1 (рис. 1). Между тем, исходя из действительных условий измерения, мы установили, что независимо от закона распределения $\psi(x)$ независимой случайной величины ξ

$$\text{Вер}(\lambda_1 \leqslant \xi \leqslant \lambda_2) = \Psi(\lambda_1, \lambda_2) = \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} \psi(x) dx = 1. \tag{8}$$

Полагая поэтому, что условию (8) подчиняется также тот частный вид функции $\psi(x)$, который мы задали соотношением (10*a*), найдем из условия (8) неопределенный множитель A, входящий в (10*a*). Мы будем иметь

$$\text{Вер } (\lambda_1 \leqslant \xi \leqslant \lambda_2) = \Psi(\lambda_1, \lambda_2) = A \left(\int_{\lambda_1}^{\lambda_2} e^{-\frac{(z-c)^2}{2\sigma^2}} dz - \right.$$

$$\left. - e^{-\frac{(\lambda_1 - c)^2}{2\sigma^2}} \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} dz \right) = 1,$$

откуда получим для вычисления A следующее окончательное выражение

$$A = \left[\int_{\lambda_1}^{\lambda_2} e^{-\frac{(z-c)^2}{2\sigma^2}} dz - (\lambda_2 - \lambda_1) e^{-\frac{(\lambda_1 - c)^2}{2\sigma^2}} \right]^{-1}. \tag{11}$$

Вводя здесь подстановки

$$\frac{z-c}{\sigma} = t, \qquad \frac{\lambda_1 - c}{\sigma} = -k \tag{12}$$

и учитывая (9), приведем (11) к более удобному для подсчетов виду

$$A = \left[2\sigma \left(\int_0^k e^{-\frac{t^2}{2}} dt - k e^{-\frac{k^2}{2}} \right) \right]^{-1}. \tag{13}$$

Выражение (13), с учетом обозначений (12), показывает, что множитель A, входящий в (10*a*), зависит от трех параметров: c, σ, λ_1. При $\lambda_1 = -\infty$ этот множитель обращается в $A_\Gamma = (\sigma\sqrt{2\pi})^{-1}$. Вычисление интеграла, содержащегося в (13), будет рассмотрено ниже.

Уточнив множитель A, входящий в выражение (10*a*) для функции $\psi(x)$, внесем это выражение функции $\psi(x)$ в исходные равенства (6), (7). Тогда мы получим два преобразованных равенства:

$$1) \text{ Вер} (\xi = x) = \psi(x) = A \left(e^{-\frac{(x-c)^2}{2\sigma^2}} - e^{-\frac{(\lambda_1 - c)^2}{2\sigma^2}} \right). \tag{14}$$

$$2) \text{ Вер } (x_1 \leqslant \xi \leqslant x_2) = \Psi(x_1, x_2) =$$

$$= A \left(\int_{x_1}^{x_2} e^{-\frac{(z-c)^2}{2\sigma^2}} dz - (x_2 - x_1) e^{-\frac{(\lambda_1 - c)^2}{2\sigma^2}} \right). \tag{15}$$

Так как указанные преобразованные равенства были найдены надлежащим видоизменением законов Гаусса (1), (3), то эти равенства (14), (15) являются теми обобщенными законами Гаусса, точечным и интегральным, которые мы хотели разыскать. Входящий сюда множитель A определяется согласно (13). Легко видеть, что при $\lambda_1 = -\infty$, $\lambda_2 = +\infty$ эти обобщенные законы (14), (15) превращаются в обычные (1), (3).

Обобщенным законам Гаусса (14), (15) можно придать более сжатый и вместе с тем более удобный для вычислений вид, если записать их следующим образом:

$$1)\ \text{Вер}(\xi = x) = \psi(x) = A\left(e^{-\frac{t^2}{2}} - e^{-\frac{k^2}{2}}\right). \tag{14a}$$

$$2)\ \text{Вер}(x_1 \leqslant \xi \leqslant x_2) = \Psi(x_1, x_2) =$$

$$= A\left[\sigma\left(\int_0^{h_2} e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt - \int_0^{h_1} e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt\right) - (x_2 - x_1)e^{-\frac{k^2}{2}}\right]. \tag{15a}$$

Здесь

$$h_1 = \frac{x_1 - c}{\sigma}, \qquad h_2 = \frac{x_2 - c}{\sigma}, \tag{16}$$

а t, k и A определяются соотношениями (12), (13), причем для сокращения числа обозначений мы положили

$$t = \frac{z - c}{\sigma} = \frac{x - c}{\sigma}.$$

Что касается интегралов вида

$$\int_0^h e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt, \tag{17}$$

то для них имеются подробные таблицы, составленные по аргументу h. Кроме того, интеграл (17) может быть вычислен непосредственно с помощью разложений [3]

$$1)\ \int_0^h e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt = \sqrt{2}\int_0^r e^{-s^2}\,ds =$$

$$= \sqrt{2}\left(r - \frac{r^3}{3} + \frac{r^5}{5.2!} - \frac{r^7}{7.3!} + \frac{r^9}{9.4!} - \ldots\right). \tag{18}$$

$$2) \int_0^h e^{-\frac{t^2}{2}} dt = \sqrt{2} \int_0^r e^{-s^2} ds =$$

$$= \sqrt{2\pi} - \frac{e^{-r^2}}{r\sqrt{2}} \left(1 - \frac{1}{2r^2} + \frac{1.3}{(2r^2)^2} - \frac{1.3.5}{(2r^2)^3} + \ldots\right), \quad (19)$$

где

$$r = \frac{h}{\sqrt{2}}. \quad (20)$$

Ряд (18) дает быструю сходимость при $r \leqslant 1$ и обеспечивает вычисление интеграла (17) с любой степенью точности, но при $r \geqslant 1{,}5$ сходимость этого ряда начинает заметно замедляться. Поэтому при $r \geqslant 2$ используют уже ряд (19), члены которого уменьшаются до тех пор, пока число их не превзойдет (r^2+1). По этим соображениям не следует брать много членов ряда (19).

Заметим, что если пределы x_1, x_2 интеграла в равенстве (15) выбраны таким образом, что

$$-\frac{x_1 - c}{\sigma} = \frac{x_2 - c}{\sigma} = h, \quad (16a)$$

то вместо (15*a*) мы будем иметь более простое выражение

$$\text{Вер}\,(x_1 \leqslant \xi \leqslant x_2) = \Psi(x_1, x_2) =$$

$$= 2A\sigma\left(\int_0^h e^{-\frac{t^2}{2}} dt - he^{-\frac{h^2}{2}}\right) \quad (15б)$$

Покончив с выводом обобщенных законов Гаусса (14), (15), остановимся на вопросе о том, в какой степени вероятности, подсчитанные по этим обобщенным законам для некоторых x и x_1, x_2, отличаются от соответствующих вероятностей, найденных согласно обычным законам Гаусса (1), (3). С этой целью, пользуясь равенствами (14*a*) и (15*a*), подсчитаем вероятности $\psi(x)$ и $\Psi(x_1, x_2)$ при $\sigma = 2$ для $k = 3$, 4, 5 и значений аргумента $h_1 = h_2 = h = 0$; 0,5; 1,0; ... ; 4,5; 5,0. Для сравнения вычислим также согласно (1) и (3) значения вероятностей $\varphi(x)$ и $\Phi(x_1, x_2)$ при $\sigma = 2$ для тех же h. В заключение найдем соответствующие разности $\Delta\psi(x)$ и $\Delta\Psi(x_1, x_2)$, где

$$\Delta\psi(x) = \psi(x) - \varphi(x), \quad \Delta\Psi(x_1, x_2) = \Psi(x_1, x_2) - \Phi(x_1, x_2). \quad (21)$$

Итог вычислений представляется в табл. 1 и 2.

Просмотр этих двух таблиц показывает, что при $k = 5$ функции $\psi(x)$ и $\Psi(x_1, x_2)$ совпадают с точностью до 5-го десятичного знака с соответствующими гауссовскими функциями $\varphi(x)$ и $\Phi(x_1, x_2)$. Отсюда следует, что для надежной оценки вероятностей измеренных значений x_i независимой случайной величины ξ достаточно брать $k = 4$ и даже, может быть, $k = 3$. При этом в действительных измерениях в равенствах (14), (15) и производных от них мы берем вместо параметров c, σ их наблюденные значения $\bar{x}$ и m, определяемые согласно (2*a*).

Таблица 1

Значения функций $\psi_k(x)$ и $\psi_\infty(x) = \varphi(x)$

$(\sigma = 2)$

$\psi(x)$ \ h	0	0,5	1,0	1,5	2,0	2,5	3,0	3,5	4,0	4,5	5,0
				$k = 3.$ $A_3 = 0,20549$							
$\psi_3(x)$	0,20321	0,17906	0,12232	0,06443	0,02553	0,00675	0,00000	—	—	—	—
				$k = 4.$ $A_4 = 0,199698$							
$\psi_4(x)$	0,19963	0,17617	0,12103	0,06476	0,02696	0,00871	0,00215	0,00037	0,00000	—	—
				$k = 5.$ $A_5 = 0,199474$							
$\psi_5(x)$	0,19947	0,17604	0,12096	0,06476	0,02700	0,00876	0,00222	0,00044	0,000068	0,000008	0,000000
				$k = \infty$ $A_\infty = A_\Gamma = 0,199471$							
$\psi_\infty(x) = \varphi(x)$	0,19947	0,17603	0,12096	0,06476	0,02700	0,00876	0,00222	0,00044	0,000067	0,000008	0,000001
$\Delta\psi_3$	0,00374	303	236	—33	—147	—201	—222	—	—	—	—
$\Delta\psi_4$	0,00016	14	7	0	—4	—5	—7	—7	—7	—	—
$\Delta\psi_5$	0,00000	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0

Таблица 2

Значения функций $\Psi_k(x_1, x_2)$ и $\Psi_\infty(x_1, x_2) = \Phi(x_1, x_2)$

$(\sigma = 2)$

Ψ_k \ $\pm h$	$\pm 0,5$	$\pm 1,0$	$\pm 1,5$	$\pm 2,0$	$\pm 2,5$	$\pm 3,0$	$\pm 3,5$	$\pm 4,0$	$\pm 4,5$	$\pm 5,0$
			$k = 3.$ $A_3 = 0,20549$							
Ψ_3	0,3900	0,6941	0,8788	0,9649	0,9946	1,00000	—	—	—	—
			$k = 4.$ $A_4 = 0,199698$							
Ψ_4	0,3833	0,6831	0,8670	0,9550	0,9880	0,99763	0,99970	1,00000	—	—
			$k = 5.$ $A_5 = 0,199474$							
Ψ_5	0,3830	0,6826	0,8664	0,9544	0,9876	0,99730	0,99950	0,99994	0,99999	1,000001 (1,000000)
			$k = \infty$ $A_\infty = A_\Gamma = 0,199471$							
$\Psi_\infty = \Phi$	0,3830	0,6826	0,8664	0,9544	0,9876	0,99730	0,99950	0,99994	0,99999	0,999999
$\Delta\Psi_3$	0,0070	115	124	105	70	0,00270	—	—	—	—
$\Delta\Psi_4$	0,0003	5	6	6	4	0,00033	20	6	—	—
$\Delta\Psi_5$	0,0000	0	0	0	0	0,00000	0	0	0	0,000001

В заключение отметим, что замена обычных законов Гаусса (1), (3) обобщенными законами (14), (15) позволит получить более точные оценки вероятностей

$$\text{Вер}\left(\frac{\overline{x}}{c} < y\right), \qquad \text{Вер}\left(\frac{m}{\sigma} < z\right)$$

сравнительно с теми, которые мы делаем, используя распределение Стьюдента и распределение χ^2 [4].

ЛИТЕРАТУРА

1. А. А. Марков. Исчисление вероятностей. ГИЗ, 1924.
2. C. F. Gauss. Werke. Teoria motus. Bd. VII. Gotha, 1871.
3. Дж. Скарборо. Численные методы математического анализа. ГТТИ, 1934.
4. Б. В. Гнеденко. Курс теории вероятностей. ГИТТЛ, 1950.