

ОБОБЩЕНИЕ УСЛОВИЯ СРЕДНЕЙ ДЕФОРМАЦИИ НА
ХРУПКИЕ МАТЕРИАЛЫ

Г. А. ДОЩИНСКИЙ

(Представлено научным семинаром кафедры сопротивления материалов)

Для теоретического предсказания опасности разрушения хрупких материалов при различных напряженных состояниях известен целый ряд предложений, начиная с „классических теорий прочности“ и кончая теориями, предложенными в последнее время [1, 2, 3, 4]. Обзору и критике различных теорий посвящен ряд обстоятельных работ [1, 2, 3, 10] и в их дополнительном анализе вряд ли есть настоятельная потребность. Достаточно будет отметить лишь основные недостатки теорий.

Решающим обстоятельством, ставящим под сомнение надежность ряда теорий, является значительное несоответствие теоретической прочности хрупких материалов данным экспериментальной проверки [1]. Значение некоторых теорий существенно умалывается узкими диапазонами напряженных состояний, надежно характеризуемых теориями. Возможность применения некоторых теорий (теория предельной огибающей Мора [9], теория Ягн [2]) ограничена необходимостью постановки серии предварительных опытов, реализующих целый ряд напряженных состояний. Принимая во внимание также ряд недостатков со стороны физического смысла и удобства практического применения, следует признать, что задача установления равноопасных условий при различных напряженных состояниях не является полностью, или хотя бы в достаточной мере, решаемой какой-либо теорией. Отсюда следует необходимость дальнейших изысканий в теории прочности хрупких материалов.

Сравнение различных теорий и оценка логичности их математической формулировки производится обычно на основе геометрической интерпретации теорий. В ортогональной системе координат, по осям которой отложены главные напряжения $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$, каждая теория отображается некоторой соответствующей ей, формой поверхности. Координаты точек, расположенных на этой поверхности, определяют соотношения напряжений в равноопасных состояниях.

Основные наблюдения над поведением хрупких материалов и соображения логического характера позволяют очертить примерную форму предельной поверхности. Равноправность осей главных напряжений для изотропных материалов определяет симметрию поверхности прочности относительно оси, равнонаклоненной к осям $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ и проходящей через начало координат. Допускаемая возможность разрушения при трехстороннем равномерном растяжении требует замкнутости

предельной поверхности со стороны положительного октанта и, наоборот, поверхность может быть незамкнутой со стороны отрицательного октанта, так как хрупкие материалы способны выдерживать довольно высокие гидростатические давления. Высокая сопротивляемость хрупких материалов сжатию и низкая сопротивляемость растяжению предопределяет уширение поверхности в сторону отрицательного октанта. Последнее обстоятельство обычно находит аналитическое выражение в теориях в зависимости функции, определяющей предельное состояние от линейного инварианта тензора напряжений. Непрерывность изменения напряжений $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ позволяет ожидать, что условие прочности будет отображаться в системе координат $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ плавной криволинейной поверхностью. Существует даже мнение [3, 2], что представление некоторых предельных поверхностей многогранниками свидетельствует о грубой приближенности соответствующих теорий. Ко всему следует добавить, что поверхность прочности должна быть поверхностью простейшей формы и, соответственно, уравнение прочности не должно быть громоздким уравнением высокой степени, иначе практическое применение теории будет затруднительным.

Сравнение различных напряженных состояний пластичных материалов на основе использования в качестве общей меры деформации e_{cp}

$$e_{cp} = \sqrt{\frac{e_1^2 + e_2^2 + e_3^2}{3}} \quad (1)$$

показывает хорошее соответствие этого критерия с экспериментальными данными по проверке условий пластичности [7, 8]. Представляется целесообразным проанализировать возможность распространения этого критерия и на материалы, неодинаково работающие на растяжение и сжатие, к которым относятся материалы с преобладающими свойствами хрупкости.

Простейшие испытания на растяжение и сжатие хрупких материалов показывают, что для них, с известной степенью приближения, возможно принятие линейной связи между напряжением и деформацией до состояний, близких к разрушению. При этом можно считать так же, что характеристики упругости являются величинами, не зависящими от вида напряженного состояния. Для хрупкого материала, разрушающегося при напряжениях σ_p и σ_c (при растяжении и сжатии), значения средних деформаций (по форме (1)) определяются:

$$\begin{aligned} e_{cp}^{раст} &= \sqrt{\frac{e_p^2 + \mu^2 e_p^2 + \mu^2 e_p^2}{3}} = e_p \sqrt{\frac{1 + 2\mu^2}{3}}, \\ e_{cp}^{сжат} &= \sqrt{\frac{e_c^2 + \mu^2 e_c^2 + \mu^2 e_c^2}{3}} = e_c \sqrt{\frac{1 + 2\mu^2}{3}}, \end{aligned} \quad (2)$$

где μ — упругая константа материала — коэффициент поперечной деформации;

e_p и e_c — относительные продольные деформации в момент разрушения при растяжении и сжатии.

Так как $\sigma_c > \sigma_p$, то и $e_{cp}^{сжат} > e_{cp}^{раст}$.

Следовательно, величина средней деформации для хрупкого материала в эквивалентных состояниях (при разрушении) не является постоянной, а как следует уже из этих двух опытов возрастает при переходе от

растяжения к сжатию. Закономерность этого возрастания для каждого материала может быть найдена лишь в том случае, если привлекаются данные дополнительных испытаний при других напряженных состояниях. Однако удобство применения теории прочности определяется минимумом данных, взятых из простейших опытов, хотя бы это было отчасти и в ущерб точности теории. Поэтому ориентируясь лишь на исходные испытания растяжения и сжатия, т. е. располагая лишь двумя опытными точками для предельного значения e_{cp}^k в первом приближении можно принять линейный закон изменения. В качестве переменного параметра этой линейной зависимости может быть принято значение относительной объемной деформации $\Theta = e_1 + e_2 + e_3$, характеризующей, пожалуй, основное различие в деформированных состояниях материала при растяжении и сжатии. Принятие зависимости более сложного вида практически нецелесообразно, так как для определения формы кривой потребуется большее число предварительных опытов (форма кривой 2-го порядка, например, определяется уже пятью опытными точками).

Исходное выражение для предельного значения средней деформации представим в виде

$$e_{cp}^k = A \cdot \Theta + B, \quad (3)$$

где A и B — экспериментальные постоянные материала. Допустимость исходной формы при отсутствии в последующих выводах дополнительных допущений может быть обоснована сравнением конечных результатов теории с экспериментальными данными. Заметим также, что в большинстве теорий прочности хрупких материалов предполагается аналогичного рода линейная зависимость критерия предельного состояния от среднего нормального напряжения

$$\sigma_0 = \frac{\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3}{3}. \quad (4)$$

Значения постоянных A и B определяются на основе испытания материала на растяжение и сжатие, для которых уравнение (3) дает:

$$e_p \sqrt{\frac{1+2\mu^2}{3}} = A \cdot (1-2\mu) e_p + B,$$

$$e_c \sqrt{\frac{1+2\mu^2}{3}} = -A \cdot (1-2\mu) e_c + B.$$

Решая совместно эту систему уравнений, находим:

$$A = \frac{(e_p - e_c) \cdot \sqrt{1+2\mu^2}}{(e_p + e_c) \cdot (1-2\mu) \cdot \sqrt{3}}, \quad B = \frac{2e_p \cdot e_c}{e_p + e_c} \sqrt{\frac{1+2\mu^2}{3}}. \quad (5)$$

Условие прочности для любого напряженного состояния в исходной форме будет иметь вид:

$$e_{cp} < e_{cp}^k. \quad (6)$$

В развернутом виде получим:

$$\sqrt{\frac{e_1^2 + e_2^2 + e_3^2}{3}} < \frac{(e_p - e_c)\sqrt{1+2\mu^2}}{(e_p + e_c)(1-2\mu)\sqrt{3}}(e_1 + e_2 + e_3) + \\ + \frac{2e_p e_c}{e_p + e_c} \sqrt{\frac{1+2\mu^2}{3}}.$$

Подставляя значения главных деформаций и предельных деформаций растяжения и сжатия, выраженных через напряжения:

$$e_1 = \frac{1}{E}(\sigma_1 - \mu\sigma_2 - \mu\sigma_3); \quad e_2 = \frac{1}{E}(\sigma_2 - \mu\sigma_3 - \mu\sigma_1);$$

$$e_3 = \frac{1}{E}(\sigma_3 - \mu\sigma_1 - \mu\sigma_2);$$

$$e_p = \frac{\sigma_p}{E}; \quad e_c = \frac{\sigma_c}{E},$$

переходим к форме условия прочности в напряжениях

$$\frac{1}{E} \sqrt{(1+2\mu^2)(\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2) - (4\mu - 2\mu^2)(\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_3\sigma_1)} < \\ < \frac{1}{E} \frac{(\sigma_p - \sigma_c)\sqrt{1+2\mu^2}}{\sigma_p + \sigma_c}(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) + \\ + \frac{2}{E} \frac{\sigma_p \cdot \sigma_c \sqrt{1+2\mu^2}}{\sigma_p + \sigma_c}.$$

Делая дальнейшие преобразования и сокращая, приходим к выражению

$$\sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - \frac{4\mu - 2\mu^2}{1+2\mu^2}(\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_3\sigma_1)} + \\ + \frac{\sigma_c - \sigma_p}{\sigma_p + \sigma_c}(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) < \frac{2\sigma_p \sigma_c}{\sigma_p + \sigma_c}. \quad (7)$$

Переходя к допускаемым напряжениям $|\sigma|_p$ и $|\sigma|_c$, можем представить окончательно условие прочности в более удобной для практических расчетов форме

$$\frac{1+\nu}{2} \sqrt{9\sigma_0^2 - k_\mu(\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_3\sigma_1)} + \frac{3(1-\nu)}{2} \sigma_0 \leq |\sigma|_p, \quad (8)$$

$$\text{где} \quad \nu = \frac{|\sigma|_p}{|\sigma|_c}, \quad k_\mu = \frac{2(1+\mu)^2}{1+2\mu^2}.$$

В отличие от теории Миролюбова И. Н. [4] данное условие предполагает влияние на прочность упругих характеристик материала, что не исключено благодаря тому, что упругое поведение хрупких материалов наблюдается почти до разрушения.

Для различных материалов $\mu = 0 \div 0,5$, $k_\mu = 2 \div 3$.

Сопротивление разрушению при сдвиге для хрупких материалов согласно условию (8) определяется зависимостью

$$\tau_k = \frac{2\sigma_p}{(1+\nu)\sqrt{k_\mu}} = (1,41 \div 1,15) \frac{\sigma_p}{1+\nu}.$$

Установим вид предельной поверхности, соответствующей условию (8). С этой целью приведем уравнение

$$\frac{1+\nu}{2} \sqrt{9\sigma_0^2 - k_\mu(\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_3\sigma_1)} + \frac{3(1-\nu)}{2}\sigma_0 = \sigma_p$$

к системе ортогональных координат x, y, z , в которой ось x равнонаклонена к осям $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$. Пользуясь при переходе очевидными соотношениями

$$x = \frac{\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3}{\sqrt{3}} = \sqrt{3}\sigma_0; \quad x^2 + y^2 + z^2 = \sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2,$$

$$\begin{aligned} \sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_3\sigma_1 &= \frac{1}{2}[(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)^2 - (\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2)] = \\ &= \frac{1}{2}(2x^2 - y^2 - z^2), \end{aligned}$$

имеем

$$\frac{1+\nu}{2} \sqrt{3x^2 - k_\mu x^2 + \frac{k_\mu}{2}(y^2 + z^2)} + \frac{\sqrt{3}(1-\nu)x}{2} = \sigma_p.$$

Освобождаясь от радикала и делая приведение подобных, получаем уравнение предельной поверхности в форме:

$$Ax^2 + Cy^2 + Cz^2 + 2Dx + F = 0, \quad (9)$$

где

$$A = \left[3 - k_\mu - \frac{3(1-\nu)^2}{(1+\nu)^2} \right]; \quad C = \frac{k_\mu}{2};$$

$$D = \frac{2\sqrt{3}\sigma_p(1-\nu)}{(1+\nu)^2}; \quad F = \frac{4\sigma_p^2}{(1+\nu)^2}.$$

Сечение предельной поверхности плоскостями $x = \text{const}$ дает окружности $y^2 + z^2 = C_1^2$.

Следовательно, предельные поверхности, определяемые уравнением (9), есть поверхности вращения относительно оси x .

Выясним возможные формы поверхности в зависимости от соотношения характеристик материала. Для поверхности вращения форма

поверхности может быть установлена по уравнению образующей. Уравнение образующей находим сечением предельной поверхности плоскостью $z=0$. Подставляя в уравнение (9) $z=0$ видим, что уравнение образующей есть уравнение кривой 2-го порядка

$$Ax^2 + Cy^2 + 2Dx + F = 0. \quad (10)$$

Инварианты этой кривой соответственно определяются:

$$J_1 = (A + C) = \frac{12\nu}{(1+\nu)^2} - \frac{k_\mu}{2};$$

$$J_2 = AC = \frac{k_\mu}{2} \left[\frac{12\nu}{(1+\nu)^2} - k_\mu \right];$$

$$J_3 = \begin{vmatrix} A & O & D \\ O & C & O \\ D & O & F \end{vmatrix} = C(AF - D^2) = -\frac{2\sigma_p^2 \cdot k_\mu}{(1+\nu)^2} (3 - k_\mu).$$

Так как $\nu \leq 1$; $k_\mu = 2 \div 3$ ($\mu = 0 \div 0,5$), то условия:

$$CF \geq 0 \text{ при } J_2 = J_3 = 0; \quad J_3 = 0 \text{ при } J_2 > 0;$$

$$J_1 J_3 > 0 \text{ при } J_2 > 0 \quad J_3 \neq 0 \text{ — несовместны.}$$

Следовательно, точкам кривой (10) соответствуют только действительные значения и в геометрическом представлении условия (8) мнимые поверхности не имеют места.

Предельные поверхности с линейной образующей определяются условием $J_3 = -\frac{2\sigma_p^2 \cdot k_\mu}{(1+\nu)^2} (3 - k_\mu)$, откуда $k_\mu = \frac{2(1+\mu)^2}{1+2\mu^2} = 3$, т. е. имеют место для материалов с $\mu = 0,5$.

$$\text{При этом если } J_2 = \frac{3}{2} \left[-\frac{3(1-\nu)^2}{(1+\nu)^2} \right] = 0, (\nu = 1), \text{ получим цилиндр}$$

Губера — Мизеса — Генки, если $J_2 = \frac{3}{2} \left[-\frac{3(1-\nu)^2}{(1+\nu)^2} \right] < 0$ ($\nu < 1$) — конус Миролубова.

Для материалов с $\mu \neq 0,5$ образующая криволинейна ($J_3 \neq 0$).

В зависимости от соотношения характеристик материала μ и ν возможными формами предельной поверхности будут поверхности эллипсоида, параболоида, гиперboloида. Вид поверхности определяется условиями:

$$\text{при } \frac{12\nu}{(1+\nu)^2} > \frac{2(1+\mu)^2}{1+2\mu^2} \text{ эллипсоид,}$$

$$\text{при } \frac{12\nu}{(1+\nu)^2} = \frac{2(1+\mu)^2}{1+2\mu^2} \text{ параболоид,}$$

$$\text{при } \frac{12\nu}{(1+\nu)^2} < \frac{2(1+\mu)^2}{1+2\mu^2} \text{ гиперboloид.}$$

Возможность отображения условия прочности подобного вида поверхностями в зависимости от свойств материала отмечалась Ягн Ю. И. [2] и W. Burzynski [10].

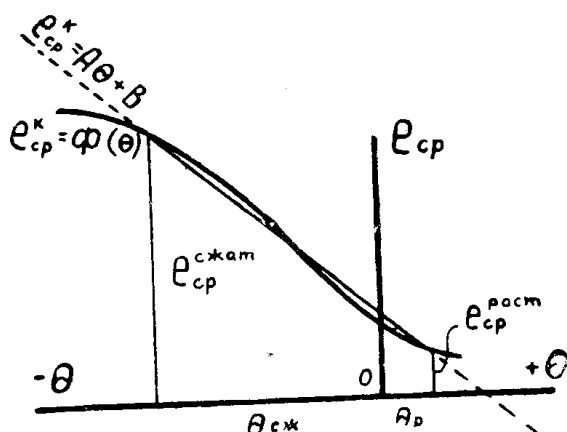
Условие (8) может быть отнесено не только к хрупкому разрушению. В условиях простого нагружения оно может быть использовано и для определения эквивалентных состояний при наличии пластических деформаций при введении в него характеристик упруго-пластических свойств материала [8]. Изменение характеристик материала в процессе упруго-пластической деформации будет приводить и к изменению формы предельной поверхности.

Пределы применимости условия [8] определяются интервалом

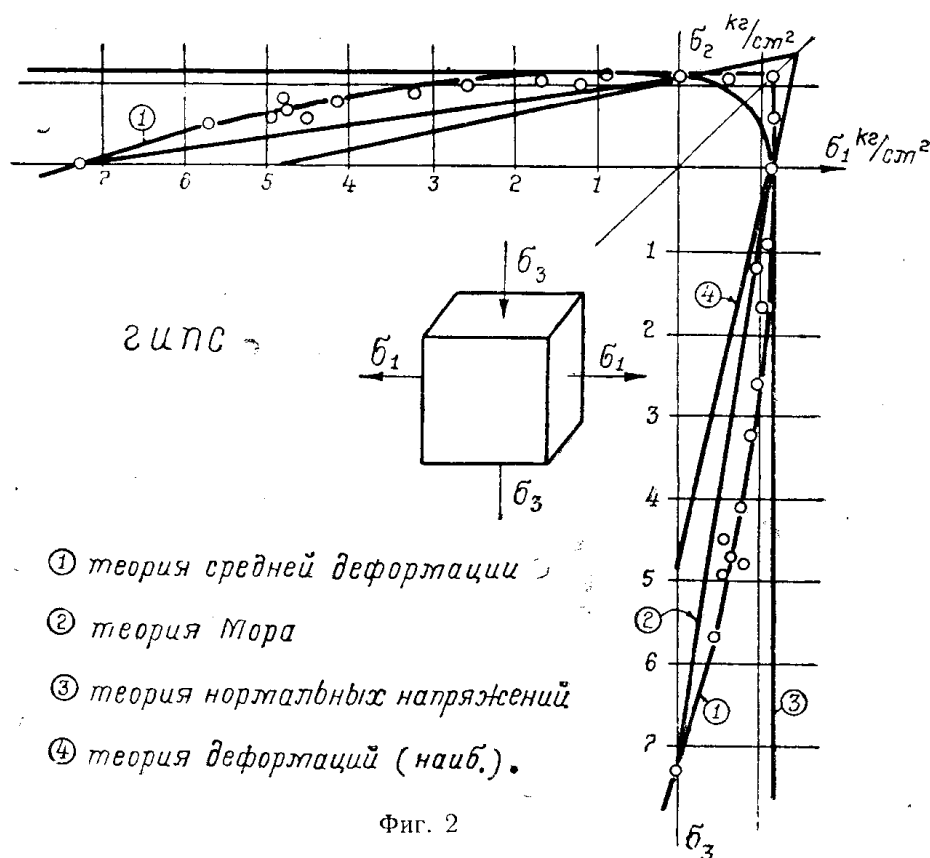
$$\Theta_{сж} = - \frac{(1 - 2\mu)\sigma_c}{E} \ll$$

$$\ll \frac{(1 - 2\mu)(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)}{E} \ll$$

$$\ll \Theta_p = \frac{(1 - 2\mu)\sigma_n}{E}$$



Фиг. 1. Примерная форма зависимости $e^k_{cp} = \Phi(\theta)$ (по опытным фактам)



Фиг. 2

Распространение линейной зависимости предельного значения средней деформации за эти пределы может привести к значительным расхождениям с опытными данными (фиг. 1).

Сравнение условия (8) с известными в технической литературе экспериментальными данными для хрупких материалов [1, 5, 6] приведено на фиг. 2. Здесь же показаны результаты, соответствующие некоторым, наиболее известным и употребительным теориям. Полагаясь на приведенные экспериментальные данные можно рекомендовать условие (8) для расчетов на прочность хрупких материалов при смешанных (растянуто-сжатых) напряженных состояниях. Для двухосных растяжений и двухосных сжатий прочность хрупких материалов по опытам [5, 6] может определяться соответственно теорией наибольших нормальных и теорией касательных напряжений.

ЛИТЕРАТУРА

1. Пономарев С. Д. и др. Основы современных методов расчета на прочность в машиностроении, Машгиз, 1950.
2. Ягн Ю. И. Новые методы расчета на прочность. Вестник инженеров и техников, № 6, 1931.
3. Баландин П. П. К вопросу о гипотезах прочности. Вестник инженеров и техников, № 1, 1937.
4. Миролобов И. Н. К вопросу обобщения теории прочности октаэдрических касательных напряжений на хрупкие материалы. Труды Ленинградского технологического ин-та им. Ленсовета, вып. 25, 1953.
5. Давиденков Н. Н. и Ставрогин А. Н. О критерии прочности при хрупком разрушении и плоском напряженном состоянии. Изв. АН СССР, ОТН, 1954.
6. Давиденков Н. Н. и Яров В. А. Хрупкое разрушение при двухосном сжатии. Журнал технической физики, т. 25, вып. 12, 1955.
7. Дошинский Г. А. Теория предельного упругого состояния. Известия Томского политехн. ин-та, т. 85, 1957.
8. Дошинский Г. А. К теории упруго-пластической деформации. Известия Томского политехн. ин-та, т. 85, 1957.
9. О. Mohr. „Technische Mechanik, Berlin, 1906.
10. W. Burzynski. „Ueber die Anstrengungshypothesen“. Schweizerische Bauzeitung, Band 94, № 21, 1929.