ИЗВЕСТИЯ
ТОМСКОГО ОРДЕНА ТРУДОВОГО КРАСНОГО ЗНАМЕНИ
ПОЛИТЕХНИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА имени С. М. КИРОВА

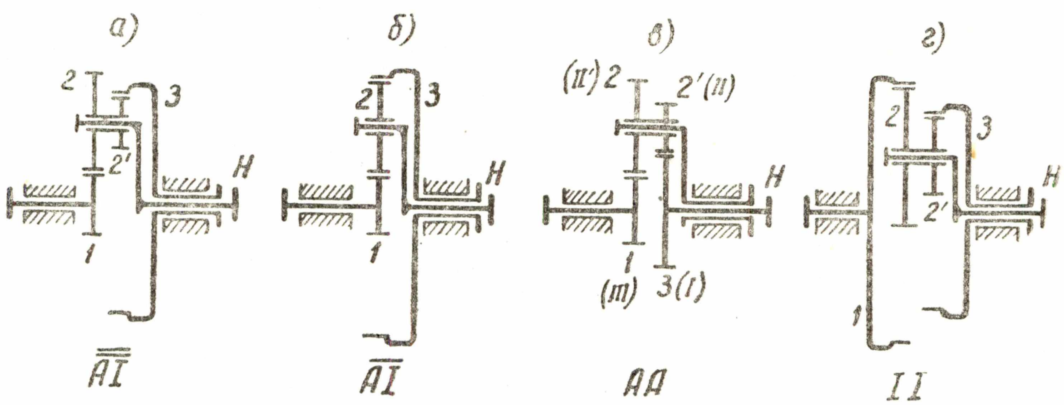
Том 96 1961

УРАВНЕНИЯ СБОРКИ СООСНЫХ ЗУБЧАТЫХ МЕХАНИЗМОВ

Ю. Я. КОВЫЛИН

(Представлено научным семинаром кафедр теоретической и прикладной механики)

Для получения минимальных габаритов и веса соосные механизмы (фиг. 1) выполняются обычно с несколькими сателлитами. При этом необходимо обеспечить так называемое „условие сборки". Это условие, как известно, требует, чтобы зубья сателлитов свободно входили в соответствующие впадины центральных зубчатых колес даже в случае идеальных (плотных, беззазорных) зацеплений.



Фиг. 1. Схемы наиболее часто встречающихся соосных многосателлитных механизмов.

Условие сборки в литературе выражают различными уравнениями. Так, например, в работе [1] получено уравнение сборки, которое можно привести к виду

$$\frac{z_1 z_{2'} \pm z_2 z_3}{k z_2} = \gamma, \qquad (1)$$

где z_1, z_2, $z_{2'}$ и z_3 — числа зубьев зубчатых колес в соответствии с фиг. 1;

k — число равномерно расположенных взаимозаменяемых сателлитов, т. е. таких сателлитов, у которых взаимное положение зубчатых колес 2 и $2'$ одинаково;

γ — некоторое целое число.

Знак плюс соответствует схеме $\overline{\overline{AI}}$, знак минус — схемам AA и II.

В работе [2] для схемы $\overline{\overline{AI}}$ рекомендуется уравнение сборки вида

$$\frac{z_1 z_{2'} + z_2 z_3}{k z_{2'}} = \gamma, \tag{2}$$

которое отличается от уравнения (1) (в применении к схеме $\overline{\overline{AI}}$) только тем, что в знаменателе левой части вместо числа z_2 поставлено число $z_{2'}$.

В работе [3] для двухрядных соосных механизмов дается (без вывода) уравнение сборки, имеющее вид

$$\frac{z_1 z_{2'} \pm z_2 z_3}{k M} = N. \tag{3}$$

Здесь кроме уже известных величин фигурируют:

M—общий наибольший делитель чисел зубьев зубчатых колес *2* и *2′*;

N — некоторое целое число.

Применительно к схеме $\overline{AI}$, которую можно рассматривать как частный случай схемы $\overline{\overline{AI}}$ ($z_2 = z_{2'} = M$), все три уравнения дают один и тот же результат

$$\frac{z_1 + z_3}{k} = N. \tag{4}$$

При расчете двухрядных схем результаты получаются существенно разные. Так, например, для механизма $\overline{\overline{AI}}$ при $z_1 = 24$, $z_2 = 36$, $z_{2'} = 27$ и $z_3 = 87$ возможные значения k представляются следующими рядами. По уравнению (1) получаем $k = 1$, 3, (5, 7,...)[1]; по уравнению (2) находим $k = 1$, 2, 4, (5, 7,...); из уравнения (3) следует, что $k = 1$, 2, 3, 4, (5, 6, 7,...). Если числа зубьев взять равными $z_1 = 18$, $z_2 = 39$, $z_{2'} = 21$ и $z_3 = 78$, то согласно уравнениям (1) и (2) сборка механизма будет невозможна при любом k (даже при $k = 1$?!), тогда как в соответствии с (3) сборка оказывается возможной при $k = 1$, 2, 3, (4, 5,...). Результаты проверки собираемости механизма AA по уравнению (1) зависят от порядка нумерации зубчатых колес, т. е. от того, какое из центральных зубчатых колес принято за первое. При применении уравнения (3) порядок нумерации не имеет значения.

Уравнения (1), (2) и (3) недостаточны для полного расчета сборки, так как ни одно из них не может дать ответ на ряд вопросов, интересующих конструктора, например:

1) каким должно быть взаимное расположение зубчатых колес *2* и *2′* сателлитов, если, например, для достижения наибольшей компактности механизма целесообразно сделать их невзаимозаменяемыми;

2) как проверить возможность сборки механизма, если сателлиты расположены неравномерно;

3) каким образом при монтаже следует располагать сателлит относительно центральных зубчатых колес.

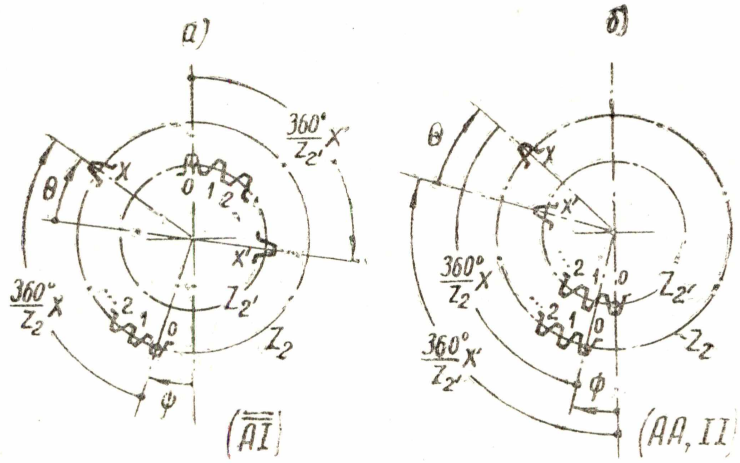
Полный расчет сборки многосателлитных соосных механизмов можно произвести при помощи так называемых обобщенных уравнений сборки [4]. Эти уравнения на практике, однако, не совсем удобны, так как для получения ответа на вопрос, возможна сборка механизма или нет, приходится исследовать иногда большое количество

[1]) Здесь и далее в скобках указаны значения k, не удовлетворяющие условию „соседства“.

решений одного из обобщенных уравнений. Между тем, при проектировании механизма, конструктора в первую очередь интересует ответ именно на этот вопрос.

Ниже излагается вывод уравнений сборки, позволяющих в удобной форме рассчитывать собираемость многосателлитных механизмов[1]).

Зубья каждого из зубчатых колес сателлитов нумеруются (фиг. 2, *а* и *б*) по ходу часовой стрелки цифрами 0, 1, 2,...,x,... (на зубчатом колесе 2) и 0, 1, 2,...,x',..., (на зубчатом колесе 2'). Зубья, обоз-



Фиг. 2. Схемы координирования зубьев и зубчатых колёс сателлитов.

наченные цифрами 0, называются контрольными. Контрольные зубья при $\psi = 0$ располагаются по разным сторонам от центра сателлита (фиг. 2, *а*) в механизме $\overline{\overline{AI}}$ и по одну сторону (фиг. 2, *б*) — в механизмах AA и II. Взаимное положение зубчатых колес 2 и 2' координируется углом ψ между осями симметрии выбранных контрольных зубьев (фиг. 2, *а* и *б*). Взаимное расположение зубьев с номерами x и x' определяется углом Θ (фиг. 2, *а* и *б*) между их осями симметрии, который, очевидно, равен

$$\Theta = \psi + \frac{360}{z_2}x - \frac{360}{z_{2'}}x'. \qquad (5)$$

На фиг. 3 показана схема механизма $\overline{\overline{AI}}$ с одним сателлитом A. Угол ψ у сателлита A взят равным нулю (при одном сателлите сборка возможна при любом значении ψ).

Далее, пусть требуется установить второй сателлит B под углом φ градусов по отношению к первому.

Обозначим полюса зацеплений буквами a, b, a' и b'. Пусть на дуге ab укладывается наибольшее целое число шагов e_1 и еще остается остаток s_1, а на дуге $a'b'$ — e_3 целых шагов и остаток s_3. Остатки дуг равны:

$$s_1 = \left(\frac{z_1}{360}\varphi - e_1\right)t_{12}, \qquad (6)$$

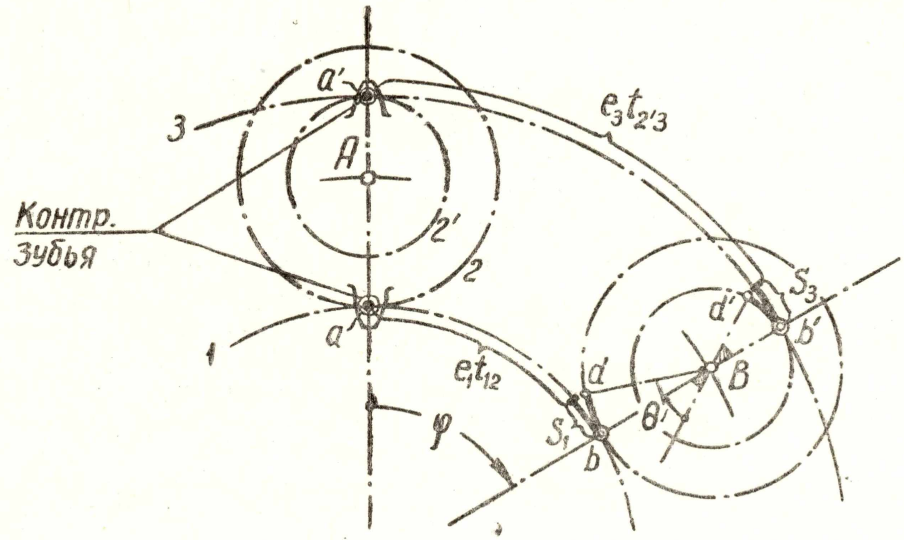
$$s_3 = \left(\frac{z_3}{360}\varphi - e_3\right)t_{2'3}\,. \qquad (7)$$

[1]) Доложено на научном семинаре кафедр теоретической и прикладной механики ТПИ 4 декабря 1958 г.

Здесь t_{12} и $t_{2'3}$ — шаги зацепления соответствующих пар зубчатых колес, измеряемые по начальным окружностям.

Далее, на начальных окружностях зубчатых колес 2 и $2'$ сателлита B от полюсов b и b' отложим дугу $bd = s_1$ и дугу $b'd' = s_3$.

Чтобы сателлит B вошел в зацепления с центральными зубчатыми колесами, на нем должна быть пара зубьев с номерами x и x',



Фиг. 3.

острый угол θ между осями симметрии которых равен сумме углов dBb и $d'Bb'$, т. е. необходимо равенство

$$\theta = \angle dBb + \angle d'Bb'.$$

Определив углы dBb и $d'Bb'$ через отношения соответствующих длин дуг к их радиусам, выраженным согласно общей формуле

$$R = \frac{z\,t}{2\pi},$$

с учетом зависимостей (6) и (7) получим

$$\theta = 360\left(\frac{\frac{z_1}{360}\varphi - e_1}{z_2} + \frac{\frac{z_3}{360}\varphi - e_3}{z_{2'}}\right). \qquad (8)$$

Соединив (5) и (8), найдем:

$$\frac{\frac{z_1}{360}\varphi - e_1}{z_2} + \frac{\frac{z_3}{360}\varphi - e_3}{z_{2'}} = \frac{\psi}{360} + \frac{x}{z_2} - \frac{x'}{z_{2'}}. \qquad (9)$$

При обратном порядке нумерации зубчатых колес правую часть (9) следует умножить на минус единицу.

Легко показать, что уравнение (9) будет справедливо и для механизмов AA и II, если в левой части его знак плюс заменить знаком минус и, кроме того, при расчете механизма II умножить правую часть на минус единицу.

Таким образом, общее уравнение сборки, пригодное для всех показанных на фиг. 1 схем при любом порядке нумерации зубчатых колес, можно представить в виде:

$$\frac{\frac{z_1}{360}\varphi - e_1}{z_2} \pm \frac{\frac{z_3}{360}\varphi - e_3}{z_{2'}} = \sigma\left(\frac{\psi}{360} + \frac{x}{z_2} - \frac{x'}{z_{2'}}\right). \tag{10}$$

Здесь и далее $\sigma = 1$, если центральное зубчатое колесо, обозначенное цифрой *1*, имеет внешние зубья, и $\sigma = -1$, если оно имеет внутренние зубья.

Верхний знак (плюс) берется при расчете схем $\overline{\overline{AI}}$ и $\overline{AI}$; нижний (минус)—при расчете схем AA и II.

Из уравнения (10), между прочим, видно, что при заданных числах зубьев всех зубчатых колес и угле φ установку сателлита B можно осуществить всегда. Для этого достаточно выбрать какие-либо номера зубьев x и x' на сателлите B (например, $x=0$ и $x'=0$), а затем по уравнению (10) вычислить необходимый угол ψ. При этом сателлиты A и B в общем случае будут невзаимозаменяемыми.

Для случая взаимозаменяемых сателлитов в уравнении (10) следует принять $\psi = 0$.

Тогда получим:

$$\frac{z_1 z_{2'} \pm z_2 z_3}{\frac{360}{\varphi}} = \sigma(z_{2'}x - z_2 x') + z_{2'}e_1 \pm z_2 e_3.$$

Правая часть этого уравнения есть целое число. Это целое число имеет ту особенность, что оно делится нацело на общий наибольший делитель M чисел зубьев зубчатых колес *2* и *2'*. Значит и левая часть уравнения также должна нацело делиться на число M. Таким образом, вместо одного уравнения сборки можно теперь записать два следующих:

$$\frac{z_1 z_{2'} \pm z_2 z_3}{\frac{360}{\varphi}M} = N, \tag{11}$$

$$\sigma(z_{2'}x - z_2 x') + z_{2'}e_1 \pm z_2 e_3 = MN. \tag{12}$$

Здесь N—некоторое целое число.

Уравнения (11) и (12) справедливы для механизмов как с некорригированными, так и с корригированными зубчатыми колесами, поскольку при их выводе на этот счет не вводилось каких-либо ограничений.

Уравнение (11) позволяет наикратчайшим путем проверить возможность установки взаимозаменяемого сателлита B под заданным номинальным углом φ к сателлиту A и в случае необходимости определить потребное значение угла φ, наименее отклоняющееся от номинального. Это отклонение, как показывают расчеты, обычно укладывается в пределах нескольких минут и лишь в худшем случае достигает нескольких градусов.

Уравнение (12) служит для определения номеров x и x' зубьев двойного сателлита B, которые при монтаже механизма должны располагаться против соответствующих им впадин e_1 и e_3 центральных зубчатых колес. Количество неповторяющихся вариантов установки сателлита, очевидно, равно числу M. Для схемы $\overline{AI}$ решать уравнение (12) не имеет смысла, так как количество возможных вариантов установки одинарного сателлита равно числу зубьев z_2 [если, конечно, удовлетворено уравнение (11)].

Порядок расчета по уравнениям (11) и (12) покажем на конкретном примере.

Пример. В механизме $\overline{\overline{AI}}$ при $z_1 = 16$, $z_2 = 39$, $z_{2'} = 21$ и $z_3 = 76$ проверить возможность установки двух взаимозаменяемых сателлитов A и B при номинальном значении угла $\varphi = \varphi_{ном} = 120°$. Если такая установка невозможна, то определить насколько надо изменить угол φ, чтобы механизм можно было собрать. Определить номера „собирающихся" зубьев сателлита B.

1) Проверяем возможность сборки механизма при $\varphi = \varphi_{ном}$ по уравнению (11).

$$\frac{z_1 z_{2'} + z_2 z_3}{\frac{360}{\varphi} M} = \frac{16 \cdot 21 + 39 \cdot 76}{\frac{360}{120} 3} = 366 \frac{2}{3} \neq N.$$

Так как получилось число дробное, то при $\varphi = 120°$ сборка механизма невозможна.

2) Определяем потребный угол установки сателлитов, приняв число $N = 367$.

$$\varphi = \frac{360 MN}{z_1 z_{2'} + z_2 z_3} = \frac{360 \cdot 3 \cdot 367}{16 \cdot 21 + 39 \cdot 76} = 120{,}109° \; (120°6'32'').$$

Как видим, потребный угол φ отличается от номинального всего на $+6'32''$.

3) Определяем номера „собирающихся" зубьев сателлита B.

$$\frac{z_1}{360} \varphi = \frac{16}{360} 120{,}109 \approx 5{,}3, \qquad e_1 = 5;$$

$$\frac{z_3}{360} \varphi = \frac{76}{360} 120{,}109 \approx 25{,}4, \qquad e_3 = 25.$$

Подставив все величины в уравнение (12), получаем

$$x = 1 + \frac{13}{7} x'.$$

Отсюда видно, что целые значения $x = 1$, 14, 27 соответствуют значениям $x' = 0$, 7, 14. Получается три возможных варианта ($M = 3$) установки сателлита B: против впадины e_3 должен быть либо зуб 0, либо зуб 7, либо зуб 14 зубчатого колеса $2'$ (фиг. 3), тогда против впадины e_1 будет располагаться либо зуб 1, либо зуб 14, либо зуб 27 зубчатого колеса 2.

При проектировании механизмов с несколькими сателлитами A, B, C, D,... необходимо в общем случае рассчитать установку каждого сателлита в отдельности (за исключением сателлита A). При этом угол φ, координирующий положения сателлитов B, C, D,..., всегда должен отсчитываться от сателлита A.

Расчет собираемости при невзаимозаменяемых сателлитах следует вести по уравнению (10). При взаимозаменяемых сателлитах расчет должен производиться по уравнениям (11) и (12).

Из уравнения (11) легко получить частные уравнения сборки, известные по литературе. Так, например, для случая равномерного расположения k взаимозаменяемых сателлитов $\varphi = 360:k$ и уравнение (11) переходит в уравнение (3).

Если в уравнение (11) подставить $\varphi = 360:k$, $N = \gamma \dfrac{z_{2'}}{M}$ и опустить знак минус, то получим уравнение (2). Наконец, при подстановке в уравнение (11) $\varphi = 360:k$ и $N = \gamma \dfrac{z_2}{M}$ приходим к уравнению (1).

Взяв значение N по уравнению (12), найдем, что в уравнении (2)

$$\gamma = x - \frac{z_2}{z_{2'}} x' + e_1 + \frac{z_2}{z_{2'}} e_3, \tag{13}$$

а в уравнении (1)

$$\gamma = \sigma\left(\frac{z_{2'}}{z_2} x - x'\right) + \frac{z_{2'}}{z_2} e_1 \pm e_3. \tag{14}$$

Из выражений (13) и (14) видно, что число γ в уравнениях (1) и (2) может быть целым только в некоторых частных случаях, когда, например, отношения соответствующих чисел зубьев сателлитов являются числами целыми. Требование, чтобы γ было только числом целым [1], [2] и др., сильнейшим образом ограничивает возможности синтеза механизмов и окупается во многих случаях либо значительным отклонением от требуемых кинематических соотношений, либо неоправданным увеличением габаритов, а нередко тем и другим вместе. В этом отношении уравнение (3), несомненно, имеет большое преимущество, так как оно значительно расширяет возможности конструктора. Однако уравнение (3) недостаточно для полного расчета сборки даже при равномерном расположении взаимозаменяемых сателлитов.

Выведенные выше уравнения (10)÷(12) позволяют легко и быстро производить полный расчет сборки любого из показанных на фиг. 1 механизмов при каком угодно расположении взаимозаменяемых и невзаимозаменяемых сателлитов.

Они могут быть использованы для расчета сборки не только двухрядных, но и многорядных плоских механизмов, а также пространственных механизмов, составленных из конических зубчатых колес.

ЛИТЕРАТУРА

1. Добровольский В. В. Подбор шестерен для редукторов с несколькими сателлитами, „Вестник инженеров и техников“, 1937, № 3.
2. Справочник машиностроителя, т. 1, Машгиз, 1954.
3. Меррит Х. Е. Зубчатые передачи, Машгиз, 1947.
4. Хронин Д. В. Условия сборки планетарных редукторов, Труды МАИ, вып. 18, Оборонгиз, 1953.