ИЗВЕСТИЯ
ТОМСКОГО ОРДЕНА ТРУДОВОГО КРАСНОГО ЗНАМЕНИ ПОЛИТЕХНИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА имени С. М. КИРОВА

Том 141 1966

ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ КОНТРОЛЯ ФЕРРОМАГНИТНЫХ МАТЕРИАЛОВ ВИХРЕВЫМИ ТОКАМИ

В. Э. ДРЕЙЗИН

(Представлена научным семинаром факультета автоматики и вычислительной техники)

При теоретическом рассмотрении метода вихревых токов приходится исследовать электромагнитные процессы в системе датчик — испытуемое изделие. Математическое описание этих электромагнитных процессов опирается на классическую теорию электромагнитного поля. В общем случае основные уравнения переменного электромагнитного поля имеют вид:

$$rot\,\overline{H} = \frac{\partial \overline{D}}{\partial t} + \overline{\delta}, \tag{1}$$

$$rot\,\overline{E} = -\frac{\partial \overline{B}}{\partial t}, \tag{2}$$

$$div\,\overline{H} = 0, \tag{3}$$

$$div\,\overline{E} = 0. \tag{4}$$

Сюда же относятся выражения, характеризующие связь векторов поля в некоторой материальной среде:

$$\overline{B} = \mu \overline{H}, \tag{5}$$

$$\overline{D} = \varepsilon \overline{E}, \tag{6}$$

$$\overline{\delta} = \sigma \overline{E}. \tag{7}$$

Здесь μ, ε, σ — параметры, выражающие макроскопические электромагнитные свойства среды. В случае, если они являются постоянными и независящими от величины векторов, уравнения Максвелла оказываются линейными и, соответственно этому, такие среды называются «линейными». Однако существуют и имеют техническое значение среды, отличающиеся заметной зависимостью макроскопических параметров от векторов поля. В этом случае уравнения Максвелла оказываются нелинейными и такие среды называются «нелинейными». Ярким примером таких сред являются ферромагнетики — вещества, магнитная проницаемость которых значительно и сложным образом зависит от магнитного поля. Помимо нелинейности здесь еще наблюдается и неоднозначность значений магнитной проницаемости при различных значениях магнитного поля, определяемая явлением гистерезиса. Интересующие нас ферромагнитные металлы все без исключения обладают магнитным гистерезисом, даже если изменения поля будут бесконечно медленные (квазистатические). Кроме того, с увеличением скорости изменений поля запаздывание магнитной индукции еще больше возрастает и обусловливается не только «статическим» гистерезисом, но также и конечностью скорости изменения поля H внутри ферромагнетика. Это добавочное возрастание запаздывания принято называть магнитной вязкостью.

Для того, чтобы иметь возможность решить уравнения Максвелла с учетом нелинейности ферромагнитной среды, необходимо в аналитической форме выразить петлю перемагничивания ферромагнетика в переменных полях и решать уравнения Максвелла как нелинейные дифференциальные уравнения. Однако выразить петлю гистерезиса в общем виде в аналитической форме не удается. Следовательно, необходимо характеризовать магнитные свойства ферромагнетиков какими-то приближенными характеристиками. Поэтому, при исследовании ферромагнетиков в переменных полях нужно в каждом конкретном случае тщательно разобраться, каким образом, какими параметрами можно наиболее полно и наиболее точно характеризовать его электромагнитные свойства.

В отечественной и зарубежной литературе по неразрушающим испытаниям металлических изделий методом вихревых токов проблема контроля ферромагнитных сплавов либо вовсе не затрагивается, либо вопросу электромагнитных параметров материала не придается должного значения. Во всех известных автору работах при переходе от исследования немагнитных материалов к магнитным μ_0 в уравнениях Максвелла просто умножалось на μ_r, причем нигде не оговаривалось, какой физический смысл должен придаваться этой характеристике, каким образом она может быть измерена, то есть оставалось совершенно неясным, что она собой представляет. При этом, конечно, оказывались совершенно неучтенными все специфические явления, происходящие в ферромагнитных материалах при перемагничивании.

В то же время профессором В. К. Аркадьевым в его работах по магнетодинамике и магнитной спектроскопии предложена характеристика, которая достаточно полно и точно отражает магнитные свойства ферромагнитной среды в слабых переменных электромагнитных полях. Этой характеристикой является комплексная магнитная проницаемость вещества. Однако до сих пор данная характеристика использовалась только в магнитной спектроскопии, вероятно, потому, что ее невозможно было измерить непосредственно. Находится она косвенным путем по расчетным кривым, которые были составлены Аркадьевым и его школой лишь для двух случаев: для прямой круглой проволоки, через которую непосредственно пропускается ток высокой частоты, и для тонкой жести, свернутой в триод, на который равномерно наматывается возбуждающая обмотка [2, 3, 4]. В настоящей работе обосновывается законность применения комплексной магнитной проницаемости вещества во всех случаях, когда ферромагнетик находится в переменном электромагнитном поле, выявляется физическая сущность этой характеристики и приводится решение уравнений Максвелла с использованием этой характеристики для случая падения цилиндрической электромагнитной волны на поверхность сплошного изотропного ферромагнитного цилиндра. Тем самым решается вопрос теории проходного датчика для контроля сплошных цилиндрических ферромагнитных тел, с учетом всех специфических явлений, происходящих в ферромагнетике при перемагничивании.

Чтобы обоснованно подойти к выявлению физической сущности комплексной магнитной проницаемости вещества, необходимо коротко рассмотреть поведение ферромагнетика в переменных полях.

При перемагничивании ферромагнитного тела в переменном синусоидальном поле магнитное состояние тела изменяется по симметричной петле, аналогичной статической (или квазистатической) петле гистерезиса. Однако в отличие от статической петли площадь петли динамического перемагничивания пропорциональна не только потерям на гистерезис, но и потерям от вихревых токов, а при достаточно высоких частотах и потерям энергии вследствие магнитной вязкости материала. При низких значениях индукции (до 100 гс) форма динамической петли представляет собой эллипс. Это указывает на то, что при синусоидальном поле индукции также синусоидальна, но будет отставать по фазе от напряженности магнитного поля. Следовательно, динамическую петлю перемагничивания тела в слабых полях можно выразить в аналитической форме и полностью охарактеризовать магнитные свойства данного тела в данном поле комплексной магнитной проницаемостью тела, которая представляет собой отношение средней по сечению тела индукции к напряженности магнитного поля на поверхности тела, выраженных в комплексной форме. Действительно, записывая напряженность магнитного поля на поверхности тела как

$$H_0 = H_{0m} \sin \omega t,$$

а среднюю по сечению тела индукцию как

$$B_{\text{ср}} = B_{\text{ср}_m} \sin (\omega t - \delta),$$

получаем параметрическую запись уравнения эллипса. Выражая индукцию и напряженность магнитного поля в виде комплексов и беря их отношение, получаем

$$\dot{\mu}_\partial = \frac{\dot{B}_{\text{ср}}}{\dot{H}_0} = \frac{B_{\text{ср}_m}\, e^{j(\omega t - \delta)}}{H_{0_m}\, e^{j\omega t}} = \mu_n e^{-j\delta} = \mu_1 - j\mu_2. \qquad (8)$$

Таким образом, процесс перемагничивания ферромагнитного тела в переменном электромагнитном поле полностью характеризуется динамической петлей, которая при слабых полях, в свою очередь, полностью характеризуется комплексной динамической магнитной проницаемостью тела. Но следует подчеркнуть, что динамическая петля характеризует не вещество, а тело. То есть с изменением формы и размеров тела, а также частоты электромагнитного поля и электропроводности материала динамическая петля, а следовательно, и динамическая комплексная магнитная проницаемость будут другими. Поэтому характеризовать магнитные свойства ферромагнетика как вещества в переменных полях данной величиной нельзя, ибо она выражает как бы суммарные электромагнитные свойства какого-то вполне определенного тела при нахождении его во вполне определенном электромагнитном поле.

Чтобы получить магнитную проницаемость, характеризующую само вещество, надо знать напряженность магнитного поля и индукцию в каждой точке данного ферромагнитного тела, то есть необходимо учесть добавочное поле вихревых токов, возникающих в ферромагнетике при помещении его в переменное электромагнитное поле. Очевидно, что в этом случае петля перемагничивания вещества будет определяться только «статическим гистерезисом» и магнитной вязкостью. Совершенно справедливо будет предположить, что если динамическая петля тела имеет форму эллипса, то и петля перемагничивания вещества, определяемая истинными значениями напряженности поля и индукции в данной точке, также будет иметь форму эллипса. В этом случае мы можем полностью охарактеризовать ее комплексной магнитной проницаемостью вещества, определяемой как отношение индукции в данной точке поля к напряженности поля в этой же точке, выраженных в виде комплексов

$$\mu' = \frac{\dot{B}}{\dot{H}} = |\mu'|\, e^{-j\delta} = \mu - j\rho'. \qquad (9)$$

Действительная составляющая μ называется консервативной или «упругой» проницаемостью и связана с упругими, то есть обратимыми процессами, происходящими при намагничивании, которые не сопровождаются потерями энергии. Мнимая часть ρ называется консумптивной, или вязкой проницаемостью, и связана с необратимыми, то есть вязкими процессами, которые определяются гистерезисом и магнитной вязкостью. Таким образом, комплексная магнитная проницаемость вещества μ' полностью определяет макроскопические магнитные свойства ферромагнетика в слабых переменных полях. Однако следует помнить, что эта величина определяет магнитные свойства не в любой момент времени, а за полный цикл перемагничивания, то есть за период. Именно благодаря этому мы получаем возможность характеризовать истинные магнитные свойства нелинейной среды постоянной комплексной величиной. Однако следует заметить, что магнитные свойства ферромагнетиков, определяемые величиной μ', сами являются функцией частоты электромагнитного поля. Эти зависимости изучает основанная В. К. Аркадьевым специальная отрасль магнетодинамики — магнитная спектроскопия. Изменение магнитной проницаемости (дисперсия и адсорбция) в зависимости от частоты обусловлено здесь не какими-то побочными явлениями, как-то экранирующим действием вихревых токов, а действительным изменением магнитных свойств веществ, что определяется процессами, происходящими в кристаллах и атомах ферромагнитного вещества. Однако для большинства материалов в области частот до 1000 гц магнитная проницаемость μ' постоянна, затем в области от 10^3 до 10^9 гц наблюдается медленный спад ее, который тем менее заметен, чем меньше абсолютное значение магнитной проницаемости материала; основные же изменения происходят в области более коротких волн и, наконец, при длине волны около 1 см магнитные материалы полностью теряют свои магнитные свойства. Все это следует иметь в виду, однако, нас будет интересовать лишь область частот до 1 мгц, где изменения магнитной проницаемости вещества для большинства материалов незначительны.

Вернемся теперь к уравнениям Максвелла. Для металлов ток смещения $\frac{\partial \overline{D}}{\partial t}$ исчезающе мал по сравнению с током проводимости $\overline{\delta}$ и, следовательно, им можно пренебречь. Тогда с учетом $\overline{\delta} = \sigma\overline{E}$ и $\overline{B} = \mu_0 \mu' \overline{H}$ уравнения Максвелла получаются в следующем виде:

$$rot\,\overline{H} = \sigma\,\overline{E},$$

$$rot\,\overline{E} = -\mu_0\,\mu' \frac{\partial \overline{H}}{\partial t}.$$

Таким образом, введя μ', мы получили формально линейные уравнения. При синусоидальных полях вместо $\overline{H}$ и $\overline{E}$ должны фигурировать символы $\dot{\overline{H}}$ и $\dot{\overline{E}}$, изображающие комплексные, то есть изменяющиеся во времени синусоидально величины. Тогда

$$rot\,\dot{\overline{H}} = \sigma\,\dot{\overline{E}}, \tag{10}$$

$$rot\,\dot{\overline{E}} = -j\omega\,\mu_0\,\mu'\,\dot{\overline{H}}. \tag{11}$$

В случае контроля цилиндрических тел в проходном датчике, на это тело будет падать цилиндрическая электромагнитная волна, возбуждающая в нем вихревые токи. Последние, образуя свое электромагнитное поле, приведут к изменению результирующего поля в полости датчика, которое и определяет его полное комплексное сопротивление (в случае однообмоточного датчика) и э. д. с. в измерительной обмотке (в случае двухобмоточного датчика). Таким образом, нам необходимо получить выражения для напряженности магнитного и электрического полей в любой точке испытуемого ферромагнитного цилиндра. Находя из первого уравнения

$$\dot{\overline{E}} = \frac{1}{\sigma}\,rot\,\dot{\overline{H}} \tag{12}$$

и подставляя его во второе, получаем

$$\frac{1}{\sigma}\,rot\,rot\,\dot{\overline{H}} = -j\omega\,\mu_0\,\mu'\,\dot{\overline{H}}\,. \tag{13}$$

Ввиду того, что $rot\,rot\,\dot{\overline{H}} = grad\,div\,\dot{\overline{H}} - \Delta\,\dot{\overline{H}} = -\Delta\,\dot{\overline{H}}$, где Δ—оператор Лапласа, получаем

$$\Delta\,\dot{\overline{H}} = j\,\omega\,\sigma\,\mu_0\,\mu'\,\dot{\overline{H}}. \tag{14}$$

Используя цилиндрическую систему координат и учитывая, что в нашем случае

$$\dot{\overline{H}} = \overline{1}_z\,\dot{H}_z;$$

$$\dot{\overline{E}} = \overline{1}_\varphi\,\dot{E}_\varphi,$$

а также $\dfrac{\partial\,\dot{\overline{H}}}{\partial\,\varphi} = 0$ вследствие круговой симметрии системы, и $\dfrac{\partial\,\dot{\overline{H}}}{\partial z} = 0$, так как краевыми эффектами мы будем пренебрегать, получаем:

$$\Delta\,\dot{\overline{H}} = \frac{\partial^2\,\dot{\overline{H}}}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\,\frac{\partial\,\dot{\overline{H}}}{\partial r}, \tag{15}$$

$$rot\,\dot{\overline{H}} = -\,\overline{1}_\varphi\,\frac{\partial\,\dot{H}}{\partial r}. \tag{16}$$

Подставляя эти выражения в (12) и (14), имеем:

$$\dot{\overline{E}} = -\,\overline{1}_\varphi\,\frac{1}{\sigma}\,\frac{\partial \dot{H}}{\partial r}, \tag{17}$$

$$\frac{\partial^2\,\dot{\overline{H}}}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\,\frac{\partial\,\dot{\overline{H}}}{\partial r} = j\,\omega\,\sigma\,\mu_0\,\mu'\,\dot{\overline{H}}. \tag{18}$$

Уравнение (18) можно привести к модифицированному уравнению Бесселя нулевого порядка от комплексного аргумента

$$r\sqrt{j\,\omega\,\sigma\,\mu_0\,\nu'} = r\sqrt{\omega\,\sigma\,\nu_0\,(\rho' + j\nu)}:$$

$$\frac{\partial^2 \dot{\overline{H}}}{\partial\,[r\sqrt{\omega\,\sigma\nu_0\,(\rho' + j\nu)}]^2} +$$

$$+\frac{1}{r\sqrt{\omega\,\sigma\nu_0\,(\rho' + j\mu)}}\cdot\frac{\partial\dot{\overline{H}}}{\partial\,[\,r\sqrt{\omega\sigma\,\nu_0\,(\rho' + j\nu)}]} - \dot{\overline{H}} = 0. \qquad (19)$$

Его общее решение находится в виде

$$\dot{\overline{H}} = \dot{\overline{A}}\,I_0\,[r\sqrt{\omega\sigma\mu_0\,(\rho' + j\mu)}] + \dot{\overline{B}}\,K_0[r\sqrt{\omega\,\sigma\,\nu_0\,(\rho' + j\nu)}]\,, \qquad (20)$$

где $\quad I_0\,[r\sqrt{\omega\,\sigma\,\nu_0\,(\rho' + j\mu)}]$ и $K_0\,[r\sqrt{\omega\,\sigma\,\mu_0\,(\rho' + j\mu)}]$

модифицированные функции Бесселя соответственно первого и второго рода нулевого порядка;

$\dot{\overline{A}}$ и $\dot{\overline{B}}$ — постоянные интегрирования, определяемые из граничных условий.

Первый член уравнения (20) описывает падающую волну, распространяющуюся от поверхности цилиндра к его оси, а второй член — отраженную волну, распространяющуюся от оси цилиндра к поверхности. Однако у сплошного изотропного цилиндра отражающих поверхностей нет и отраженной волны не будет, то есть $\dot{B} = 0$. Принимая напряженность магнитного поля у поверхности цилиндра (при $r = r_0$) равной $\dot{\overline{H}}_0$ и подставляя в уравнение (20) $r = r_0$, получаем

$$\dot{\overline{H}}_0 = \dot{\overline{A}}\,I_0\,[r_0\sqrt{\omega\,\sigma\,\mu_0\,(\rho' + j\nu)}]\,,$$

откуда

$$\dot{\overline{A}} = \dot{\overline{H}}_0\,\frac{1}{I_0\,[r_0\sqrt{\omega\sigma\nu_0\,(\rho' + j\nu)}]}\,.$$

Таким образом, получаем

$$\dot{\overline{H}} = \dot{\overline{H}}_0\,\frac{I_0\,[r\sqrt{\omega\sigma\nu_0\,(\rho' + j\mu)}]}{I_0\,[r\sqrt{\omega\sigma\mu_0\,(\rho' + j\mu)}]} = \overline{1}_z\,\dot{H}_0\,\frac{I_0\,[r\sqrt{\omega\sigma\mu_0\,(\rho' + j\nu)}]}{I_0\,[r_0\sqrt{\omega\sigma\mu_0\,(\rho' + j\nu)}]}\,. \qquad (21)$$

Подставляя найденное выражение для $\dot{\overline{H}}$ в (17), получаем

$$\dot{\overline{E}} = -\,\overline{1}_\varphi\,\frac{1}{\sigma}\,\frac{\partial}{\partial r}\left\{\dot{H}_0\,\frac{I_0\,[r\sqrt{\omega\sigma\nu_0\,(\rho' + j\nu)}]}{I_0[r_0\sqrt{\omega\sigma\nu_0\,(\rho' + j\mu)}]}\right\} =$$

$$= -\,\overline{1}_\varphi\,\frac{\dot{H}_0}{\sigma}\sqrt{\omega\sigma\nu_0\,(\rho' + j\nu)}\;\frac{I_1\,[r\sqrt{\omega\sigma\nu_0\,(\rho' + j\nu)}]}{I_0\,[r_0\sqrt{\omega\sigma\mu_0\,(\rho' + j\mu)}]}\,, \qquad (22)$$

где $I_1\,[r\sqrt{\omega\sigma\mu_0\,(\rho' + j\mu)}]$ — функция Бесселя первого рода первого порядка.

Таким образом, мы получили выражения (21) и (22), определяющие значения векторов напряженности электрического и магнитного полей в любой точке цилиндрического ферромагнитного тела, помещенного коаксиально в полость соленоида, обтекаемого переменным током.

Дальше уже по обычной методике можно получить выражения для приращений сопротивления (для однообмоточного датчика) и э. д. с. в измерительной обмотке (для двухобмоточного). Очевидно, что понятием комплексной магнитной проницаемости вещества следует пользоваться и при анализе накладного датчика и вообще в любом случае, когда требуется описывать поведение ферромагнетика в переменных синусоидальных электромагнитных полях, так как эта характеристика наиболее полно и точно отражает истинные магнитные свойства ферромагнитной среды в переменном электромагнитном поле.

Следует заметить, что комплексной магнитной проницаемостью можно пользоваться не только при слабых полях, когда индукция синусоидальна, а динамическая петля имеет форму эллипса, но и при достаточно сильных полях, когда динамическая петля отличается по форме от эллипса. При этом мы действительную динамическую петлю как бы заменяем равным ей по площади эллипсом, благодаря чему численная величина потерь остается той же.

ЛИТЕРАТУРА

1. В. К. Аркадьев. Теория электромагнитного поля в ферромагнитном металле. ЖРФХО, физ. отд., 45, 312, 1913.

2. В. К. Аркадьев. Электромагнитные процессы в металлах. Ч. II., Энергоиздат, М., 1936.

3. В. К. Аркадьев, К. А. Волкова. Вычисление магнитной проницаемости ферромагнитных проволок и пластин при переменном поле. Сборник «Проблемы ферромагнетизма и магнетодинамики», Изд. АН СССР, 1946.

4. К. М. Поливанов. Определение комплексной магнитной проницаемости вещества из эффективной комплексной магнитной проницаемости тела по методу В. К. Аркадьева. Сборник «Проблемы ферромагнетизма и магнетодинамики», Изд. АН СССР, 1946.