ИЗВЕСТИЯ
ТОМСКОГО ОРДЕНА ТРУДОВОГО КРАСНОГО ЗНАМЕНИ ПОЛИТЕХНИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА имени С. М. КИРОВА

Том 141 1966

АНАЛИЗ АБСОЛЮТНОЙ УСТОЙЧИВОСТИ ШИРОТНО-ИМПУЛЬСНЫХ СИСТЕМ

И. А. ГОНЧАР, О. С. ВАДУТОВ

(Представлена научным семинаром факультета автоматики и вычислительной техники)

В последнее время возникла необходимость новых решений в области источников питания. Перспективным является применение в стабилизаторах напряжения регулирующих элементов, работающих в ключевом режиме. Такой режим работы регулирующего элемента позволяет получить сравнительно высокий к. п. д. источника, так как потери на регулирующем элементе в ключевом режиме незначительны.

Блок-схема импульсного стабилизатора напряжения изображена на рис. 1.

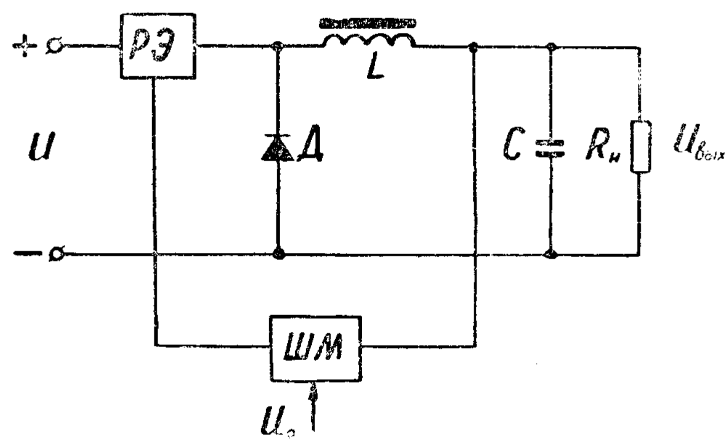

Рис. 1.

Регулирующий элемент, периодически замыкаясь с периодом, равным Т, пропускает ток в течение времени $t_и$, а затем размыкается.

Прямоугольные импульсы после РЭ сглаживаются обычным фильтром, состоящим из емкости C и индуктивности L. Диод D служит для создания контура, по которому замыкается ток индуктивности после размыкания регулирующего элемента.

Прямоугольные импульсы управления на РЭ поступают от широтного модулятора ШМ, длительность импульсов зависит от разности опорного и выходного напряжений. Регулирование выходного напряжения достигается изменением соотношения $t_и/T$.

Таким образом, импульсный стабилизатор напряжения по существу является системой автоматического регулирования с широтно-импульсной модуляцией. Такая система включает в себя импульсный элемент ИЭ, непрерывную часть НЧ и элемент рассогласования. Блок-схема широтно-импульсной системы ШИС изображена на рис. 2.

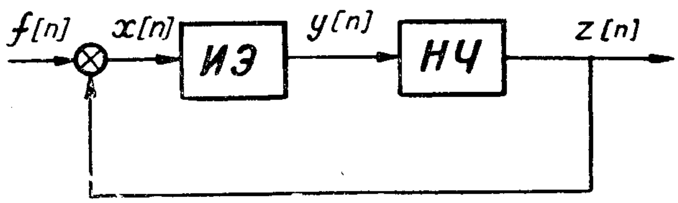

Рис. 2.

Уравнение импульсного элемента с широтно-импульсной модуляцией имеет вид

$$y[\bar{t}] = \begin{cases} k_и & n < \bar{t} < n + \gamma[n]. \\ 0 & n + \gamma[n] < \bar{t} < n + 1. \end{cases} \tag{1}$$

Здесь $k_и$ — высота импульсов, а $\gamma[n]$ — относительная длительность импульсов. Зависимость $\gamma[n]$ от входной величины $x[n]$ изображена на рис. 3, аналитически эта зависимость запишется

$$\gamma[n] = \begin{cases} \varkappa \cdot x[n] & \text{при } 0 < x[n] < \dfrac{1}{\varkappa}, \\ 1 & \text{при } x[n] > \dfrac{1}{\varkappa}, \\ 0 & \text{при } x[n] < 0. \end{cases} \tag{2}$$

Импульсные системы с ШИМ являются нелинейными системами, так как для них несправедлив принцип суперпозиции и, кроме того, выходная характеристика импульсного элемента имеет насыщение. Поэтому исследование этого класса систем в общем виде связано с определенными трудностями.

Динамика широтно-импульсных систем (ШИС) рассматривалась рядом авторов в линейном приближении, т. е. при небольшой модуляции. В работе [1] изложены графический и табличный способы построения переходных процессов при любой глубине модуляции, которые, однако, не дают возможности судить об устойчивости этих систем, а также исследовать автоколебательные режимы [2].

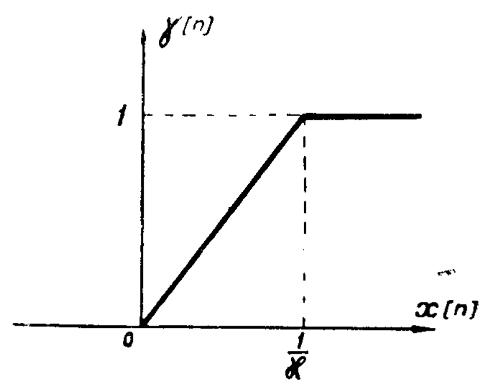

Рис. 3.

Поповым В. М. предложены новые методы исследования абсолютной устойчивости непрерывных нелинейных автоматических систем [3], которые отличаются от второго метода Ляпунова.

Аналогичныве методы для нелинейных импульсных автоматических систем были разработаны Цыпкиным Я. З. [4, 5], которые использованы в данной работе при анализе устойчивости ШИС второго порядка.

Уравнение замкнутой широтно-импульсной системы

На непрерывнную часть ШИС действует последовательность импульсов, амплитуда которых остается постоянной и равной $k_и$, а длительность изменяется по закону (2).

Реакция непрерывной части на импульс длительности $\gamma[m]$, приложенный в момент $\bar{t}=m$, равна

$$\begin{cases} k_и h(\bar{t}-m) & m \leqslant \bar{t} \leqslant m+\gamma[m], \\ k_и [h(\bar{t}-m)-h(\bar{t}-m-\gamma[m])] & m+\gamma[m] \leqslant \bar{t}, \end{cases} \tag{3}$$

где $h(\bar{t})$ — реакция непрерывной части на единичный скачок, которая определяется по известной формуле разложения [6].

Выходная величина $z(\bar{t})$ широтно-импульсной системы равна сумме реакций непрерывной части на каждый импульс

$$z(\bar{t}) = k_и \sum_{m=0}^{n-1} h(\bar{t}-m) - h(\bar{t}-m-\gamma[m]) + k_и h(\bar{t}-n),$$
$$m \leqslant \bar{t} \leqslant m+\gamma[m], \tag{4}$$
$$z(\bar{t}) = k_и \sum_{m=0}^{n} h(\bar{t}-m) - h(\bar{t}-m-\gamma[m]),$$
$$m+\gamma[m] \leqslant \bar{t} \leqslant m+1.$$

Заменяя в последнем выражении $\bar{t}=n+\varepsilon$, перейдем к решетчатым функциям

$$z[n,\varepsilon] = \sum_{m=0}^{n-1} k_и (h[n-m,\varepsilon] - h[n-m,\varepsilon-\gamma[m]]) + k_и h[0,\varepsilon], \tag{5}$$
$$0 \leqslant \varepsilon \leqslant \gamma[m],$$
$$z[n,\varepsilon] = \sum_{m=0}^{n} k_и (h[n-m,\varepsilon] - h[n-m,\varepsilon-\gamma[m]]),$$
$$\gamma[m] \leqslant \varepsilon \leqslant 1.$$

Принимая во внимание, что

$$k_и h(\bar{t}) = c_{00} + \sum_{\nu=1}^{l} c_{\nu 0}\, e^{q_\nu \bar{t}}, \tag{6}$$

где

$$c_{00} = \frac{k_и P_н(0)}{Q_н(0)}; \qquad c_{\nu 0} = \frac{k_и P_н(q_\nu)}{Q'_н(q_\nu)\, q_\nu},$$

получаем уравнение рассматриваемой ШИС относительно оригиналов

$$z[n,\varepsilon] = \sum_{m=0}^{n-1} \sum_{\nu=1}^{l} c_{\nu 0} (1-e^{-q_\nu \gamma[m]})\, e^{q_\nu (n-m)}\, e^{q_\nu \varepsilon} + c_{00} + \sum_{\nu=1}^{l} c_{\nu 0}\, e^{q_\nu \varepsilon},$$
$$0 \leqslant \varepsilon \leqslant \gamma[m], \tag{7}$$
$$z[n,\varepsilon] = \sum_{m=0}^{n} \sum_{\nu=1}^{l} c_{\nu 0} (1-e^{-q_\nu \gamma[m]})\, e^{q_\nu (n-m)},$$
$$\gamma[m] \leqslant \varepsilon \leqslant 1.$$

Переходя к изображениям с использованием теоремы свертки, найдем для разомкнутой ШИС

$$Z^*(q,\varepsilon)=\sum_{\nu=1}^{l} c_{\nu 0}\frac{e^{q_\nu}}{e^q-e^{q_\nu}} D\{1-e^{-q_\nu \gamma[n]}\}e^{q_\nu \varepsilon}+D\{k_и h[0,\varepsilon]\},$$

$$0\leqslant\varepsilon\leqslant\gamma[n], \tag{8}$$

$$Z^*(q,\varepsilon)=\sum_{\nu=1}^{l} c_{\nu 0}\frac{e^{q}}{e^q-e^{q_\nu}} D\{1-e^{-q_\nu \gamma[n]}\}e^{q_\nu \varepsilon},$$

$$\gamma[n]\leqslant\varepsilon\leqslant 1.$$

При $\varepsilon=0$ $h[0,\varepsilon]=0$, тогда

$$Z^*(q,0)=Z^*(q)=\sum_{\nu=1}^{l} c_{\nu 0}\frac{e^{q_\nu}}{e^q-e^{q_\nu}} D\{1-e^{-q_\nu \gamma[n]}\}. \tag{9}$$

Изображения определяются по их оригиналам при помощи дискретного преобразования Лапласа, или D-преобразования

$$F^*(q)=\sum_{n=0}^{\infty} e^{-qn} f[n]=D\{f[n]\}, \tag{10}$$

где q — параметр преобразования.

Уравнение (9) позволяет представить разомкнутую широтно-импульсную систему в виде l параллельно соединенных ветвей, каждая из которых в свою очередь состоит из последовательно соединенных линейной импульсной части ЛИЧ и не линейного элемента НЭ. При этом передаточная функция ЛИЧ будет

$$W_\nu^*(q)=c_{\nu 0}\frac{e^{q_\nu}}{e^q-e^{q_\nu}},\quad (\nu=1,2,\dots l), \tag{11}$$

а характеристика нелинейного элемента

$$\Phi_\nu(x[n])=1-e^{-q_\nu \gamma[n]}. \tag{12}$$

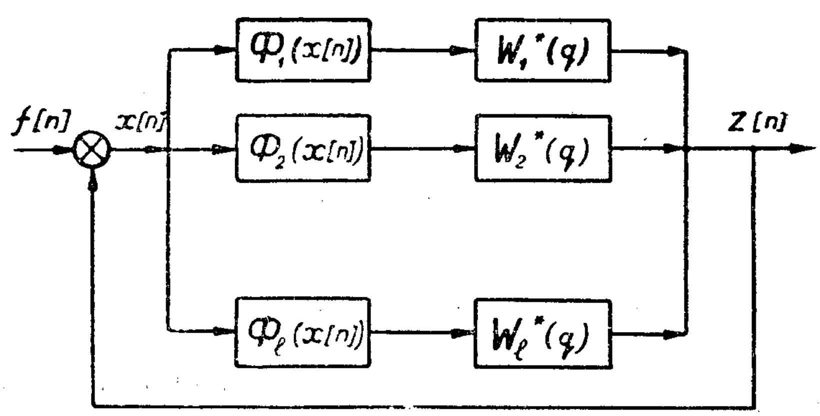

Рис. 4.

Уравнение замкнутой ШИС (рис. 4) относительно изображений запишется в виде

$$X^*(q)=F^*(q)-\sum_{\nu=1}^{l} W_\nu^*(q)D\{\Phi_\nu(x[n])\}, \tag{13}$$

соответственно относительно оригиналов

$$x[n] = f[n] - \sum_{m=0}^{n} \sum_{\nu=1}^{l} w_\nu[m] \ \Phi_\nu(x[n-m]), \tag{14}$$

где

$$W_\nu^*(q) = D\{w_\nu[n]\}.$$

Абсолютная устойчивость ШИС второго порядка

Рассмотрим широтно-импульсную систему, непрерывная часть которой описывается дифференциальным уравнением второго порядка (рис. 1).

Вопросы устойчивости нелинейной импульсной автоматической системы разработаны Я. З. Цыпкиным [4, 5] для случая, когда НИАС состоит из одного нелинейного элемента и одной линейной импульсной части. Покажем, что полученные в этих работах критерии абсолютной устойчивости положения равновесия распространяются и на ШИС второго порядка. Для этого случая уравнения (13) и (14) примут вид

$$X^*(q) = F^*(q) - W_1^*(q) \cdot D\{\Phi_1(x[n]\} - W_2^*(q) \cdot D\{\Phi_2(x[n])\}, \tag{15}$$

$$x[n] = f[n] - \sum_{m=0}^{n} w_1[m]\,\Phi_1(x[n-m]) - $$

$$- \sum_{m=0}^{n} w_2[m]\,\Phi_2(x[n-m]). \tag{16}$$

Рассуждения будем вести аналогично изложенным в [4]. Введем вспомогательные функции

$$\varphi_{1N}[n] = \begin{cases} \Phi_1(x[n]) & 0 \leqslant n \leqslant N, \\ 0 & n < 0,\ n > N; \end{cases} \tag{17}$$

$$\varphi_{2N}[n] = \begin{cases} \Phi_2(x[n]) & 0 \leqslant n \leqslant N \\ 0 & n < 0,\ n > N \end{cases}$$

и

$$\begin{aligned} \psi_{1N}[n] &= x_N[n] - \frac{1}{k_1}\varphi_{1N}[n], \\ \psi_{2N}[n] &= x_N[n] - \frac{1}{k_2}\varphi_{2N}[n]. \end{aligned} \tag{18}$$

Функция $x_N[n]$ определяется уравнением (16) при замене в нем $\Phi_1(x[n])$ и $\Phi_2(x[n])$ на $\varphi_{1N}[n]$ и $\varphi_{2N}[n]$, т. е.

$$x[n] = f[n] - \sum_{m=0}^{n} w_1[m]\,\varphi_{1N}[n-\mathrm{m}] - $$

$$- \sum_{m=0}^{n} w_2[m]\,\varphi_{2N}[n-m]. \tag{19}$$

Составим выражение

$$\rho_N = \sum_{n=0}^{\infty} \varphi_{1N}[n]\,\psi_{1N}[n] + \sum_{n=0}^{\infty} \varphi_{2N}[n]\,\psi_{2N}[n]. \tag{20}$$

Подставляя в него значения φ_{1N}, φ_{2N}, ψ_{1N}, ψ_{2N}, получим

$$\rho_N = \sum_{n=0}^{N} \Phi_1(x[n]) \left[x[n] - \frac{\Phi_1(x[n])}{k_1}\right] +$$

$$+ \sum_{n=0}^{N} \Phi_2(x[n]) \left[x[n] - \frac{\Phi_2(x[n])}{k_2}\right]. \tag{21}$$

Если характеристики нелинейных элементов $\Phi_1(x[n])$ и $\Phi_2(x[n])$ принадлежат соответственно секторам $(0,\ k_1)$ и $(0,\ k_2)$, т. е.

$$\begin{gathered} 0 < \frac{\Phi_1(x[n])}{x[n]} < k_1, \\ 0 < \frac{\Phi_2(x[n])}{x[n]} < k_2, \end{gathered} \tag{22}$$

то положение равновесия ШИС второго порядка будет абсолютно устойчивым при условии

$$\rho_N < c, \quad (c > 0). \tag{23}$$

Найдем условия выполнения неравенства (23), для чего воспользуемся формулой Ляпунова—Парсеваля [3]

$$\rho_N = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \Phi_{1N}^{*}(-j\bar{\omega})\, \Psi_{1N}^{*}(j\bar{\omega})\, d\bar{\omega} +$$

$$+ \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \Phi_{2N}^{*}(-j\bar{\omega})\, \Psi_{2N}^{*}(j\bar{\omega})\, d\bar{\omega}, \tag{24}$$

где

$$\Phi_{1N}^{*}(j\bar{\omega}),\ \Phi_{2N}^{*}(j\bar{\omega}),\ \Psi_{1N}^{*}(j\bar{\omega}) \text{ и } \Psi_{2N}^{*}(j\bar{\omega}) \text{ —}$$

спектральные функции.

$$\begin{gathered} \Phi_{1N}^{*}(j\bar{\omega}) = D\{\varphi_{1N}[n]\}_{q=j\bar{\omega}} = \sum_{n=0}^{N} e^{-j\bar{\omega}n}\, \Phi_1(x[n]), \\ \Phi_{2N}^{*}(j\bar{\omega}) = D\{\varphi_{2N}[n]\}_{q=j\bar{\omega}} = \sum_{n=0}^{N} e^{-j\bar{\omega}n}\, \Phi_2(x[n]), \end{gathered} \tag{25}$$

$$\begin{gathered} \Psi_{1N}^{*}(j\bar{\omega}) = D\{x_N[n]\}_{q=j\bar{\omega}} - \frac{1}{k_1} D\{\varphi_{1N}[n]\}_{q=j\bar{\omega}}, \\ \Psi_{2N}^{*}(j\bar{\omega}) = D\{x_N[n]\}_{q=j\bar{\omega}} - \frac{1}{k_2} D\{\varphi_{2N}[n]\}_{q=j\bar{\omega}}. \end{gathered} \tag{26}$$

Обозначим

$$D\{x_N[n]\}_{q=j\bar{\omega}} = X_N^*(j\bar{\omega}). \tag{27}$$

Тогда уравнения (26) при условии (27) примут вид

$$\begin{aligned} \Psi_{1N}^*(j\bar{\omega}) &= X_N^*(j\bar{\omega}) - \frac{1}{k_1}\Phi_{1N}^*(j\bar{\omega}), \\ \Psi_{2N}^*(j\bar{\omega}) &= X_N^*(j\bar{\omega} - \frac{1}{k_2}\Phi_{2N}^*(j\bar{\omega}). \end{aligned} \tag{28}$$

Определим $X_N^*(j\bar{\omega})$, подвергнув (18) D-преобразованию при $q = j\bar{\omega}$,

$$X_N^*(j\bar{\omega}) = F^*(j\bar{\omega}) - W_1^*(j\bar{\omega})\,\Phi_{1N}^*(j\bar{\omega}) - W_2^*(j\bar{\omega})\,\Phi_{2N}^*(j\bar{\omega}). \tag{29}$$

Из уравнения (24) при условии (28) и (29) получим

$$\begin{aligned} \rho_N = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} &\{\Phi_{1N}^*(j\bar{\omega})\cdot F^*(j\bar{\omega}) - \Pi_1^*(j\bar{\omega})\cdot|\Phi_{1N}^*(j\bar{\omega})|^2 - \\ &- W_2^*(j\bar{\omega})\,\Phi_{1N}^*(-j\bar{\omega})\,\Phi_{2N}^*(j\bar{\omega})\}\,d\bar{\omega} + \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\{\Phi_{2N}^*(j\bar{\omega})\cdot F^*(j\bar{\omega}) - \\ &- \Pi_2^*(j\bar{\omega})|\Phi_{2N}^*(j\bar{\omega})|^2 - W_1^*(j\bar{\omega})\,\Phi_{1N}^*(j\bar{\omega})\,\Phi_{2N}^*(-j\bar{\omega})\}\,d\bar{\omega}. \end{aligned} \tag{30}$$

Здесь обозначено

$$\begin{aligned} \Pi_1^*(j\bar{\omega}) &= W_1^*(j\bar{\omega}) + \frac{1}{k_1}, \\ \Pi_2^*(j\bar{\omega}) &= W_2^*(j\bar{\omega}) + \frac{1}{k_2}. \end{aligned} \tag{31}$$

Поскольку интеграл от мнимой части выражения (30) равен нулю, то имеет смысл оставить в подинтегральном выражении только вещественные части.

В [5] доказано, что первые два слагаемые в обоих интегралах ограничены при условии

$$\begin{aligned} Re\,\Pi_1^*(j\bar{\omega}) &> 0, \\ Re\,\Pi_2^*(j\bar{\omega}) &> 0. \end{aligned} \tag{32}$$

Поэтому рассмотрим лишь последние слагаемые, которые обозначим

$$\begin{aligned} S = &-\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} Re\,\Phi_{1N}^*(j\bar{\omega})\,\Phi_{2N}^*(j\bar{\omega})\,W_2^*(j\bar{\omega})\,d\bar{\omega} - \\ &-\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} Re\,\Phi_{1N}^*(j\bar{\omega})\,\Phi_{2N}^*(j\bar{\omega})\,W_1^*(j\bar{\omega})\,d\bar{\omega}. \end{aligned} \tag{33}$$

Для частного случая, когда непрерывная часть представляет собой колебательный контур, корни характеристического уравнения которого комплексно сопряжены, будут комплексно сопряженными и функции $\Phi_{1N}^{*}(j\bar{\omega})$ и $\Phi_{2N}^{*}(j\bar{\omega})$. Тогда можно записать

$$S = -\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |\Phi_{1N}^{*}(j\bar{\omega})|^2 \, Re W_2^{*}(j\bar{\omega})\, d\bar{\omega} - \\ -\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |\Phi_{1N}^{*}(j\bar{\omega})|^2 \, Re W_1^{*}(j\bar{\omega})\, d\bar{\omega}. \qquad (34)$$

При условии (32) величины $Re W_1^{*}(j\bar{\omega})$ и $Re W_2^{*}(j\bar{\omega})$ ограничены, поэтому

$$\rho_N < c \quad (c > 0). \qquad (35)$$

Таким образом, широтно-импульсная система второго порядка будет абсолютно устойчива, если характеристики нелинейных элементов $\Phi_1(x[n])$ и $\Phi_2(x[n])$ принадлежат соответственно секторам $(0, k_1)$ и $(0, k_2)$, и

$$Re\, \Pi_1^{*}(j\bar{\omega}) = Re W_1^{*}(j\bar{\omega}) + \frac{1}{k_1} > 0, \\ Re\, \Pi_2^{*}(j\bar{\omega}) + Re W_2^{*}(j\bar{\omega}) + \frac{1}{k_2} > 0. \qquad (36)$$

Этот критерий устойчивости является лишь достаточным и, кроме того, он справедлив для широтно-импульсных систем, непрерывная часть которых описывается уравнением второго порядка и имеет комплексно-сопряженные корни.

ЛИТЕРАТУРА

1. Я. З. Цыпкин. Расчет процессов в нелинейных системах прерывистого регулирования. «Автоматика и телемеханика», т. XVII, № 6, 1956.
2. И. В. Пышкин. Автоколебания в системах с широтно-импульсной модуляцией. Сб. «Теория и применение дискретных автоматических систем». Изд-во АН СССР, М, 1960.
3. В. М. Попов. От абсолютной устойчивости нелинейных систем автоматического регулирования. «Автоматика и телемеханика», т. XXII, № 8, 1961.
4. Я. З. Цыпкин. Об устойчивости в целом нелинейных импульсных автоматических систем. Доклады АН СССР, т. 145, № 1, 1962.
5. Я. З. Цыпкин. Абсолютная устойчивость положения равновесия и процессов в нелинейных импульсных автоматических системах. «Автоматика и телемеханика», т. XXIV, № 12, 1963.
6. Я. З. Цыпкин. Теория линейных импульсных систем. Физматгиз, М, 1963.