

## САМОРАСКАЧИВАНИЕ АВТОКОЛЕБАТЕЛЬНОЙ ЭЛЕКТРОМЕХАНИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ ПРИ УЧЕТЕ СИЛ ТРЕНИЯ

В. М. РИККОНЕН

(Представлена научным семинаром факультета автоматики и вычислительной техники)

В практике электроприводов и автоматических систем очень важно установить причину возникновения свободных периодических движений, которые носят название автоколебаний.

Автоколебательные системы анализируются методами теории нелинейных колебаний и при этом, естественно, необходимо учитывать все характерные особенности условий и свойств системы, чтобы получить правильную картину о происходящих явлениях. Обычно при составлении дифференциального уравнения движения системы электропривода полагают постоянство статического момента нагрузки на валу двигателя и, в крайнем случае, принимают его равным нулю; при этом уравнения движения оказываются одинаковыми, только в первом случае уравнение пишется в отклонениях, во втором случае — в полных координатах системы (переменных). Поэтому в литературе [1, 2] самовозбуждение колебаний в системе объясняется наличием остаточного магнетизма в машинах, соотношением параметров системы и не учитывается влияние сил сухого трения.

Однако пренебрежение постоянным статическим моментом на валу двигателя, который носит характер «сил сухого трения», приводит к совершенно иной картине самораскачивания, чем та, которая происходит в действительности. При указанных допущениях мы получаем принципиально качественно различные системы: если без учета статического момента система оказывается автоколебательной, то при учете его система приобретает свойства потенциально-автоколебательных систем. Возьмем в качестве примера типичную автоколебательную систему генератор последовательного возбуждения — двигатель независимого возбуждения и при обобщении полученных выводов распространим их на аналогичные электромеханические системы вообще (рис. 1,а).

В теории автоматического регулирования известно, что с помощью момента сухого трения можно эффективно бороться с колебаниями механических систем (рис. 1,б). Это так называемое демпфирование сухим трением. Однако природа этого явления существенно отличается от обычного демпфирования вязким трением.

Если даже мы рассматриваем случай холостого хода, когда на двигателе отсутствует полезная нагрузка, то и в этом случае двигатель при вращении преодолевает момент холостого хода, обзаванный силам трения в контактах щеток, подшипниках, трению о воздух и др. Таким образом, в общем случае электромагнитный момент двигателя преодолевает, кроме динамического момента, еще и статический момент  $M_s$ .

Чаще всего статический момент не зависит от скорости двигателя, а знак его меняется с изменением направления вращения: это и характеризует основное свойство сил сухого трения (моменты потерь в передающих звеньях привода, в рабочих частях механизма, нагрузка рабочего инструмента).

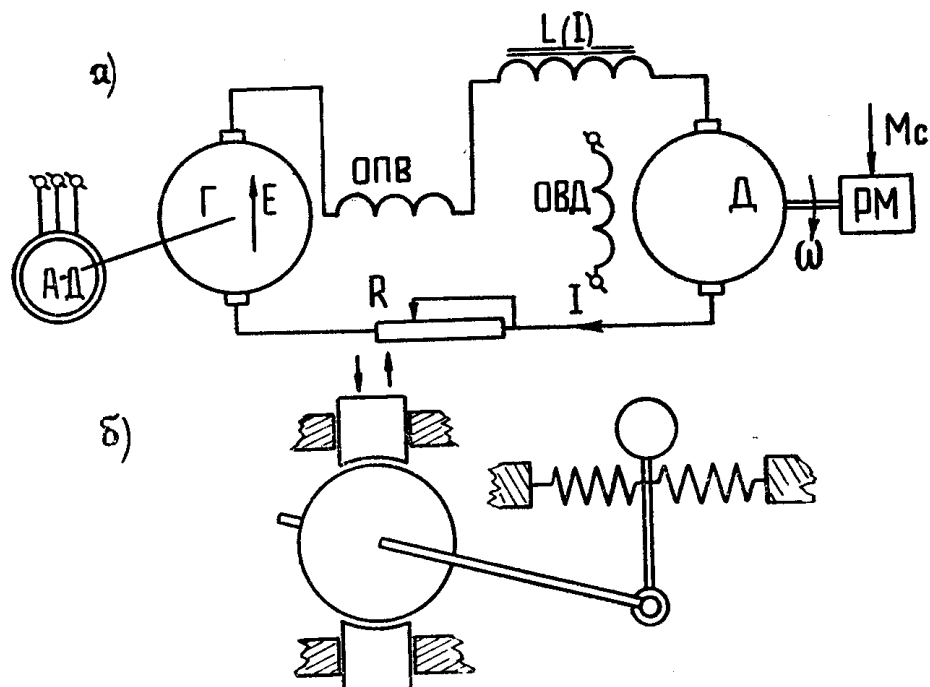


Рис. 1.

В этом случае характеристика момента нагрузки может быть представлена рис. 2.

Как видно из рисунка, знак момента зависит от знака скорости. С моментом нагрузки связана мощность, которую мы назовем условно мощностью потерь на трение

$$P_{\text{тр}} = \frac{M_{\text{тр}} \omega}{9,81}. \quad (1)$$

Поскольку самораскачивание системы происходит в инкрементной области, когда система увеличивает свой запас энергии, то совершенно необходимо учитывать и потери энергии благодаря наличию сил трения (кроме потерь в активном сопротивлении силового контура). Уравнение системы рис. 1 имеет вид

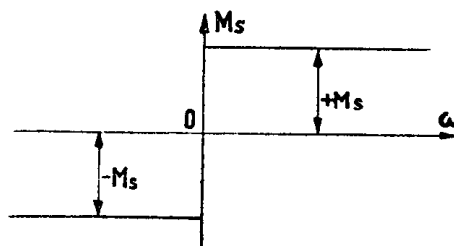


Рис. 2.

$$L \frac{d^2 I}{dt^2} + (R - \alpha + 3\beta I^2) \frac{dI}{dt} + \frac{C_e C_m}{J} (I - I_s) = 0, \quad (2)$$

где  $I$  — ток силового контура;

$J$  — момент инерции привода;

$R$  — активное сопротивление контура генератор—двигатель;

$L$  — индуктивность контура;

$C_m C_e$  — постоянные двигателя;

$\alpha$  и  $\beta$  — коэффициенты аппроксимации характеристики генератора.

Для выяснения физической картины колебаний с нагрузкой на валу двигателя предположим сначала, что диссипативный член в (2) равен нулю.

Уравнение примет вид

$$L \frac{d^2 I}{dt^2} + \frac{C_e C_M}{J} (I \mp I_s) = 0. \quad (3)$$

Предположим, что в системе вызван внешней силой начальный ток  $I_{01}$ , больший, чем  $I_s$ . Следовательно, двигатель придет в движение, и уравнение его будет:

а)  $LI_1'' + kI_1 = 0$ , где  $I_1 = I - I_s$  при  $\omega > 0$ ,

б)  $LI_2'' + kI_2 = 0$ , где  $I_2 = I - I_s$  при  $\omega < 0$ .

Начальный ток в такой колебательной системе будет убывать, а начало отсчета токов для уравнения (а) будет в точке  $I_s$ ; пока ток больше тока  $+I_s$ , двигатель будет ускоряться; с момента, когда ток станет меньше  $+I_s$  и изменит знак — скорость двигателя будет замедляться при положительном направлении (колебательное движение вокруг точки  $O_1$ , рис. 3).

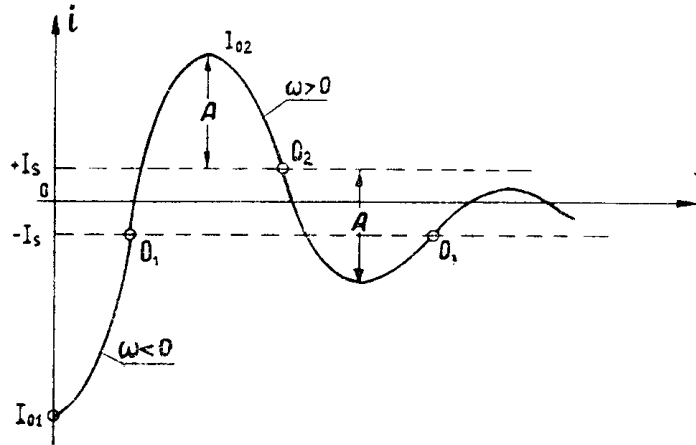


Рис. 3.

Достигнув максимального значения противоположного знака, ток затем начнет уменьшаться по величине, а скорость при этом изменит свой знак — станет отрицательной, — причем изменит свой знак и  $M_s$ . Движение должно происходить по уравнению (б) вокруг центра  $O_2$ , аналогично движению по уравнению (а).

Как мы видим, силы сухого трения не изменяют частоты колебаний, которая в этом случае определяется частотой гармонического осциллятора

$$h_0 = \sqrt{\frac{C_e C_M}{JL}}. \quad (4)$$

Рассмотрим баланс энергий в крайних положениях обобщенной координаты  $I$  [3]: в положении  $I_{01}$  — энергия только «потенциальная» и равна

$$V_1 = \frac{kI_{01}^2}{2},$$

в положении противоположном крайнем

$$V_2 = \frac{kI_{02}^2}{2}.$$

Очевидно, при прохождении зоны „сухого трения“ потери от сил трения составят

$$\frac{k}{2} (I_{01}^2 - I_{02}^2) = (I_{01} + I_{02}) \cdot f_0.$$

Силы сухого трения совершают работу потерь энергии, пропорциональную координате, так как имеют природу упругой силы.

Отсюда

$$I_{01} - I_{02} = \frac{2f_0}{k} = 2I_s. \quad (5)$$

Из рассмотренного идеального случая можно сделать следующие выводы:

1. При наличии начального тока достаточной величины система получает возможность совершить то или иное количество колебаний, пока энергия, переданная в систему, не израсходуется в работе сил сухого трения.

2. Система теряет при прохождении зоны «сухого трения» в амплитуде тока столько, сколько составляет величина этой зоны.

3. В теории колебаний при наличии сил вязкого трения различают системы на колебательные и апериодические.

При наличии сил сухого трения можно выбрать достаточно большое отклонение, чтобы система совершила ряд колебаний, а поэтому нет надобности при этом различать системы на колебательные или неколебательные.

Для нас здесь важно отметить, что при наличии на валу двигателя постоянного момента  $M_s$  — рассматриваемая система является потенциально-автоколебательной, т. е. явление колебаний в системе зависит от начального импульса.

Рассмотрим решение уравнения (3) на фазовой плоскости.

$$I'' + h_0^2 (I \mp I_s) = 0. \quad (3)$$

Уравнение интегральных кривых

$$\frac{dy}{dI} = \frac{-h_0^2 (I \mp I_s)}{y}. \quad (6)$$

После интегрирования имеем:

$$\left. \begin{aligned} \text{при } \omega > 0: \quad & \frac{y^2}{2R^2} + \frac{(I - I_s)^2}{\frac{2R^2}{h_0^2}} = 1, \\ \text{при } \omega < 0: \quad & \frac{y^2}{2R^2} + \frac{(I + I_s)^2}{\frac{2R^2}{h_0^2}} = 1. \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

Как видно, это есть уравнение эллипсов, сдвинутых относительно начала координат на  $\pm I_s$  (рис. 4).

Из рисунка видно, что отрезок  $O_1 - O_2$  есть геометрическое место состояний равновесия системы, в которые она приходит после нескольких колебаний при достаточно большом начальном токе. При почти гармонических колебаниях (квазилинейных) влияние сил сухого трения аналогично: при любом толчке система имеет способность совершить то или иное число колебаний, но всегда автоколебания будут затухать. Система обладает абсолютной устойчивостью. Рассмотрим теперь уравнение (2) с учетом второго члена, но только в начальной части характеристики

генератора, так как самораскачивание происходит именно в этой зоне (рис. 5).

При значениях  $R > \alpha$  система имеет движения периодически затухающие. При добавлении момента статического  $M_s$  мы должны ожидать усиление явления затухания.

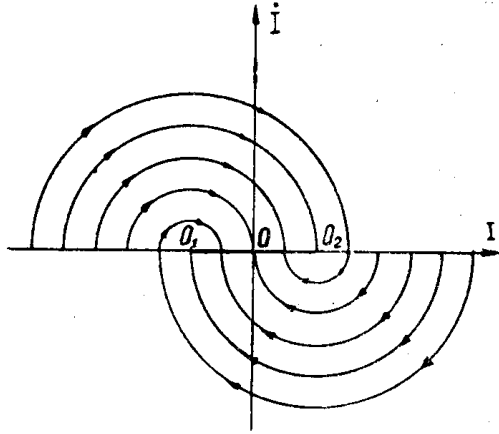


Рис. 4.

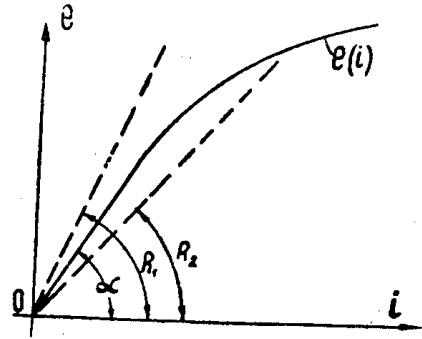


Рис. 5.

Чем больше по величине  $M_s$ , тем, естественно, необходимо большее поступление энергии в систему для развития колебаний, а это означает большую разность  $(\alpha - R)$ , или, по уравнению (2), большее отрицательное сопротивление. Следовательно, для соблюдения колебательно затухающей устойчивости системы при большем  $M_s$  существует большая зона изменений сопротивлений.

Однако при неравенстве  $\alpha - R > 0$  нельзя говорить об абсолютной устойчивости системы при различных начальных отклонениях и различных нагрузках.

Перепишем уравнение (2) для начальной части характеристик

$$I'' - 2\delta I' + h_0^2 (I \mp I_s) = 0, \quad (8)$$

где

$$2\delta = \frac{\alpha - R}{L}.$$

Заметим, что при условии  $\delta \neq 0$  в системе получается заниженная в сравнении с  $h_0$  частота

$$P^2 = h_0^2 - \delta^2.$$

В первой части статьи при  $\delta = 0$  мы видели, что уменьшение в амплитуде тока происходило на величину зоны сухого трения, т. е.

$$I_{01} - I_{02} = 2I_s.$$

Если  $\delta > 0$ , что означает  $\alpha > R$ , то в системе при движении происходит частичная компенсация потерь трения, так что указанное изменение амплитуд уменьшится, т. е.

$$I_{01} - I_{02} < 2I_s.$$

Применим для анализа системы в этом случае метод точечных отображений А. А. Андропова [3].

Установившееся незатухающее движение возникает в том случае, если максимальные отклонения токов будут одинаковыми, т. е.

$$I_{01} = I_{02}.$$

Если амплитуда тока относительно  $O_1$  есть  $I_{01} - I_s$ , то через полупериод  $\frac{1}{2}T$  (где  $T = \frac{2\pi}{P}$ ) она станет равной

$$(I_{01} - I_s) e^{\frac{1}{2}\delta T}. \quad (9)$$

Относительно начала  $O$  отклонение будет

$$I_{02} = (I_{01} - I_s) e^{\frac{1}{2}\delta T} - I_s. \quad (10)$$

Условия возрастания амплитуд токов запишутся так:

$$(I_{01} - I_s) e^{\frac{1}{2}\delta T} - I_s \geq I_{01}. \quad (11)$$

Из (11) получаем условия „жесткого“ возбуждения автоколебаний для потенциально-автоколебательной системы

$$I_{01} \geq \frac{1 + e^{\frac{1}{2}\delta T}}{e^{\frac{1}{2}\delta T} - 1} \cdot I_s = k_1 I_s. \quad (12)$$

Для возникновения устойчивых движений в системе, обусловленных наличием предельного цикла, необходимо, чтобы начальный толчок в системе был больше правой части уравнения (12).

Условия жесткого возбуждения автоколебаний можно изобразить графически.

Уравнение (10) можно переписать таким образом:

$$I_{02} = I_{01} \cdot e^{\frac{1}{2}\delta T} - I_s (1 + e^{\frac{1}{2}\delta T}).$$

Коэффициент  $e^{\frac{1}{2}\delta T}$  дает тангенс угла наклона прямой  $I_{02} = f(I_{01})$  (рис. 6).

Линия  $OB$  проведена под углом  $45^\circ$  и дает значения  $I_{01}$ , равные  $I_{02}$ . Линия  $MN$  дает зависимость  $I_{02} = f(I_{01})$ . При толчке тока в системе  $I_{01} < I_A$  мы получаем уменьшающиеся со временем амплитуды токов.

При толчке тока или возмущениях  $I_{01} > I_A$  колебания возрастают. В точке  $A$  имеем значение неустойчивого равновесия или неустойчивого предельного цикла. Значение тока  $I_A$  находится по уравнению (12)

$$I_A = \frac{1 + e^{\frac{1}{2}\delta T}}{e^{\frac{1}{2}\delta T} - 1} I_{sA}.$$

При значениях  $e^{\frac{1}{2}\delta T} = 1$  линия  $MN \parallel OB$ , что означает отсутствие точки пересечения, и, следовательно, в системе не могут возникнуть устойчивые предельные циклы. Так как

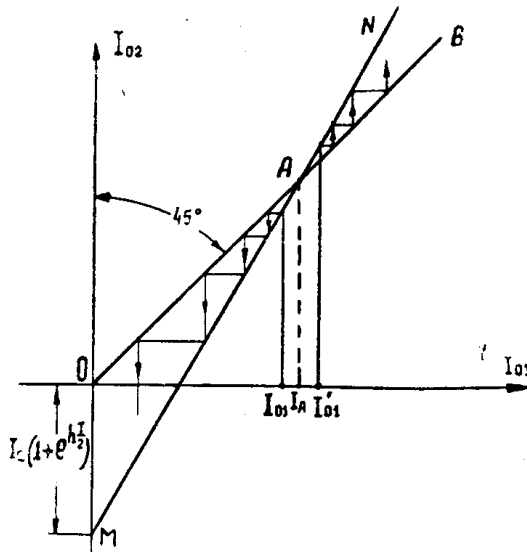


Рис. 6.

$$\frac{1}{2} \delta T = \frac{\alpha - R}{2L} \frac{2\pi}{2h_0} = \frac{\alpha - R}{2L} \frac{2\pi}{2 \sqrt{\frac{1}{LC}}} = \frac{\alpha - R}{\sqrt{\frac{L}{C}}} \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2} \frac{\alpha - R}{\rho}, \quad (13)$$

то отсутствие устойчивых автоколебаний означает или  $\alpha = R$  или  $\rho = \infty$ ;  $\rho$  — волновое сопротивление контура.

С увеличением отношения  $\frac{\pi}{2} \cdot \frac{\alpha - R}{\rho}$  точка пересечения линий приближается к началу координат, что означает меньшие начальные толчки в системе для возникновения устойчивых автоколебаний при прежних значениях тока нагрузки  $I_s$ . Очень важно отметить тот факт, что при одном и том же ускоряющем напряжении (т. е.  $\alpha - R = \text{const}$ ) система ведет себя в отношении возникновения автоколебаний по-разному в зависимости от волнового сопротивления контура. Этот вывод новый для условий жесткого возбуждения автоколебаний в электромеханической системе и является важным для понимания физической картины самораскачивания.

На рис. 7 показаны затухающие периодические движения при недостаточном начальном толчке тока в системе рис. 1. В той же системе при меньшем активном сопротивлении силового контура и даже мень-

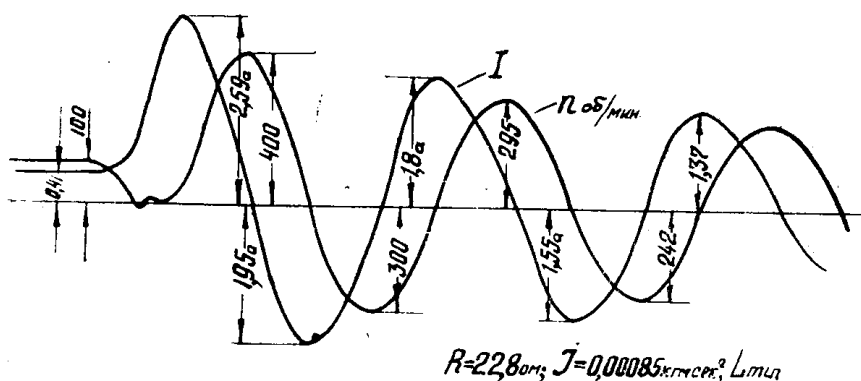


Рис. 7.

шем начальном толчке в системе возникло самораскачивание, приведшее систему к режиму автоколебаний с устойчивым предельным циклом (рис. 8).

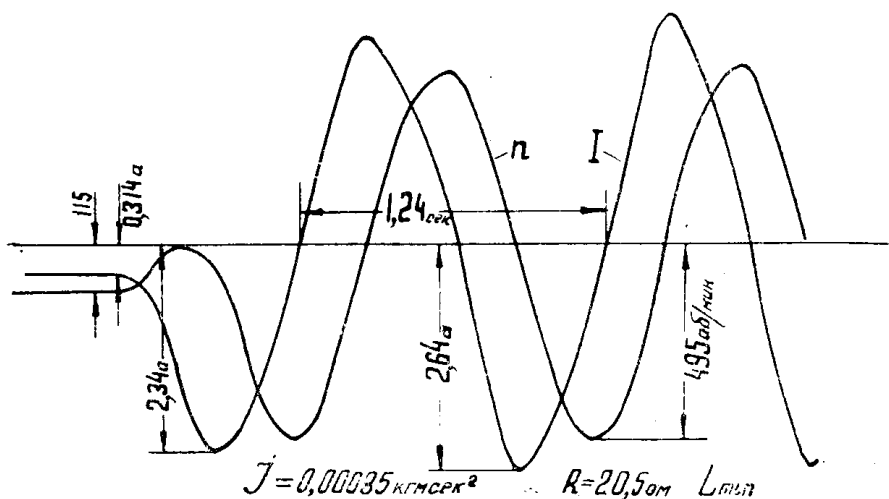


Рис. 8.

## ЛИТЕРАТУРА

1. М. В. Шулейкин. Самовозбуждение электрических колебаний в условиях коллекторных динамомашии. Известия Спб. Политехнического института, т. XX, 1913.
  2. М. Н. Костенко. Спецкурс электрических машин, 1949.
  3. Н. А. Андронов, А. А. Витт, С. Э. Хайкин. Теория колебаний. ГИФМЛ, 1959.
-