ИЗВЕСТИЯ
ТОМСКОГО ОРДЕНА ТРУДОВОГО КРАСНОГО ЗНАМЕНИ ПОЛИТЕХНИЧЕСКОГО
ИНСТИТУТА имени С. М. КИРОВА

Том 147 1966

РАСЧЕТ МАНОМЕТРИЧЕСКИХ ПРУЖИН

М. П. ШУМСКИЙ

(Представлена научным семинаром кафедры гироскопических приборов и устройств)

В практике приборостроения используются манометрические пружины с различными формами поперечного сечения, метод расчета которых зачастую неизвестен. Не решен вопрос об оптимальной форме сечения манометрических пружин. В связи с этим представляет интерес задача о напряжениях и перемещениях под действием давления p в пружине, форма сечения которой задана уравнением $y = y(x)$, где $y(x)$ — произвольная функция.

С целью упрощения исследования примем обычные в подобных задачах допущения:

1. Все участки пружины, выделенные сечениями, нормальными к оси пружины, находятся в одинаковых условиях.
2. Справедливы гипотезы о ненадавливании слоев и неизменности нормали.
3. Осевая линия трубки не растягивается.
4. Малая полуось сечения мала по сравнению с радиусом кривизны оси пружины ($в \ll R$).
5. Пружина симметрична относительно плоскости, в которой лежит ось пружины.

В дальнейшем предполагается, что сечение имеет две оси симметрии. Отсутствие симметрии по второй оси не создает принципиальных трудностей при использовании предлагаемого метода.

В работе используются обозначения:

p — избыточное давление в пружине;
a, b — большая и малая полуоси сечения;
h — толщина стенки пружины;
R — радиус кривизны оси пружины;
x, y — координаты точки средней линии сечения;
z, z_y — координата точки на нормали к стенке пружины, отсчитываемая от средней линии, и ее проекция на ось y;
E, μ — модуль упругости и коэффициент Пуассона;
$\delta\gamma$ — относительный угол разгиба пружины;
w, w_0 — смещение точки средней линии в направлении оси y и величина этого смещения в точке $x = 0$;
T — нормальное усилие в сечении, отнесенное к единице длины средней линии;
N — равнодействующая напряжений в сечении $x = a$ единичного кольца;

σ_1 — нормальное напряжение в сечении пружины;
ε_1 — относительное удлинение средней поверхности стенки в направлении напряжения σ_1;
F — площадь сечения пружины;
s — дуга средней линии сечения;
$4l$ — периметр средней линии сечения;
J — момент инерции площади сечения относительно оси x;
g — интенсивность нагрузки на единичное кольцо, обусловленной наличием нормальной силы T в сечении пружины;
v, φ, ψ, Φ, Ψ, C — функции, зависящие от формы средней линии сечения;
A — коэффициент, зависящий от формы и размеров сечения;
$\varkappa = \dfrac{Rh}{a^2}$ — параметр пружины.

Под действием давления p волокно AB части пружины, выделенной двумя близкими поперечными сечениями, занимает положение A_1B_1 (рис. 1). Относительное удлинение

$$\varepsilon_1 = \frac{CB_1}{AB} = \frac{CD - Db_1}{AB} = \frac{w\Theta - (y - z_v + w)\,\vartheta}{(R + y + z_y)\Theta}. \qquad (1)$$

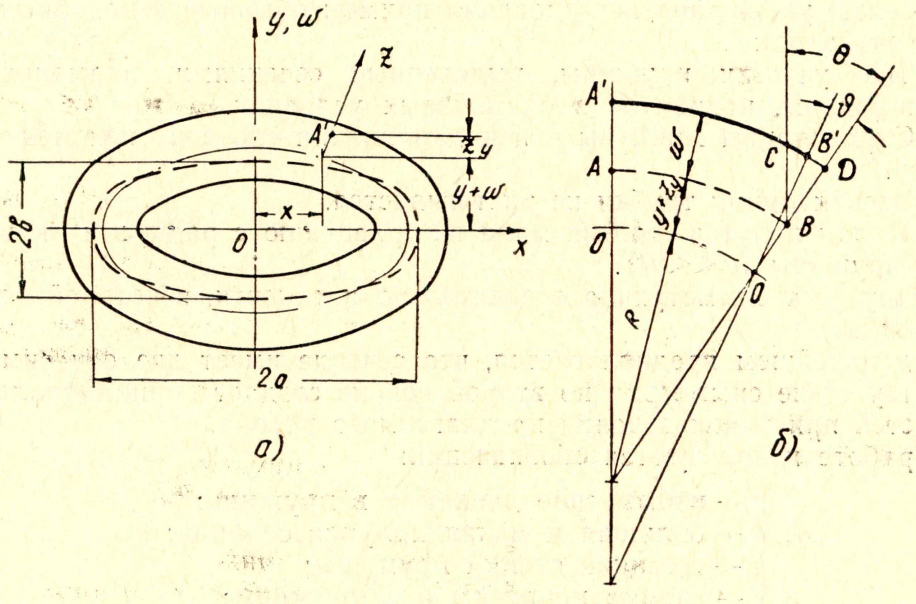

Рис. 1.
а — деформированное поперечное сечение пружины; *б* — деформация продольного волокна

По условию задачи $y \ll R_1$, $z_y \ll R$. В области малых перемещений $w \ll y$. Пренебрежем в формуле (1) малыми членами

$$\varepsilon_1 = \frac{w - y\delta\gamma}{R} - \frac{z_y\delta\gamma}{R}. \qquad (2)$$

Здесь $\delta\gamma = \dfrac{\vartheta}{\Theta}$ — относительный угол разгиба пружины, w — проекция на ось y перемещения точки A средней линии сечения.

Найдем нормальное усилие в сечении, отнесенное к единице длины средней линии сечения.

$$T = \frac{Eh}{R} (\delta\gamma \cdot y - w) \cdot \Theta. \tag{3}$$

Здесь E — модуль упругости, h — толщина стенки пружины.

Двумя нормальными сечениями вырежем из пружины единичное кольцо (рис. 2). Вследствие непараллельности сечений нормальные

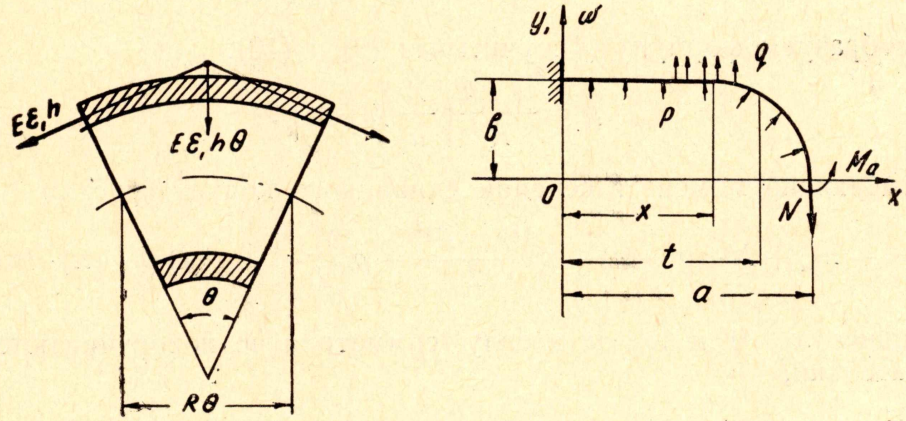

Рис. 2

усилия на участке ds единичного кольца дают равнодействующую $\frac{Tds}{R\Theta}$, параллельную оси y.

Форму средней линии сечения пружины после деформации можно найти, решив задачу об изгибе единичного кольца нормальной нагрузкой p и нагрузкой

$$g = \frac{T}{R\Theta} = \frac{Eh}{R^2} (\delta\gamma \cdot y - w), \tag{4}$$

параллельной оси y (рис. 2). На рис. 2 $N = pa + \int\limits_0^a gds\,(x)$.

Чтобы отыскать зависимость между неизвестными w и $\delta\gamma$ в правой части формулы (4), используем условие отсутствия момента в сечении пружины

$$\int\limits_F \sigma_1 (y + z_y)\, dF = 0, \tag{5}$$

здесь F — площадь сечения, σ_1 — нормальное напряжение в сечении.

Для сечения, симметричного относительно оси x, условия (5) равносильны следующему:

$$\int\limits_F \varepsilon_1 (y + z_y)\, dF = 0. \tag{6}$$

Учитывая, что $dF = ds \cdot dz$, а ε_1 определяется формулой (2), и выполняя интегрирование, найдем

$$h \int\limits_0^{4l} ywds - J \cdot \delta\gamma = 0. \tag{7}$$

Здесь $J = \int\limits_F^o (y + z_y)^2 \, dF$, $4l$ — периметр. (8)

Из уравнения (7)

$$\delta\gamma = \frac{4w_0 h}{J} \int\limits_0^e y \frac{w}{w_0} ds. \tag{9}$$

Обозначим

$$v = \frac{w}{w_0}; \quad A = \frac{4ah}{J} \int\limits_0^e yvds. \tag{10}$$

Преобразуем формулу (4), учитывая (9) и (10),

$$g = \frac{w_0 Eh}{R^2} \left(\frac{A}{a} y - v \right). \tag{11}$$

Изгибающий момент в сечении единичного кольца (рис. 2)

$$M = -M_a + N \cdot (a - x) - p \frac{(a-x)^2}{2} - p \frac{y^2}{2} - \int\limits_x^a g(t)(t - x) \cdot ds(t). \tag{12}$$

Сечения $x = 0$ и $x = a$ в силу симметрии не поворачиваются, следовательно,

$$\int\limits_0^e Mds = 0. \tag{13}$$

Из (13), учитывая (11) и (12) и введя обозначения

$$\frac{1}{2} \int\limits_0^x \left(1 - \frac{x^2 + y^2}{a^2} \right) ds(x) = a\psi, \tag{14}$$

$$\int\limits_0^x \left[(a - x) \int\limits_0^e yds - \int\limits_x^a xyds(x) + x \int\limits_x^a yds(x) \right] ds(x) = ba^3 \varphi_1, \tag{15}$$

$$\int\limits_0^x \left[(a - x) \int\limits_0^e v \cdot ds - \int\limits_x^a xvds(x) + x \int\limits_x^a vds(x) \right] ds(x) = a^3 \varphi^2, \tag{16}$$

$$\varphi_2 - A \frac{b}{a} \varphi_1 = \varphi, \tag{17}$$

найдем

$$w_0 = \frac{R^2}{Eh} \left(p \frac{\psi(a)}{\varphi(a)} - \frac{M_a l}{a^3 \varphi(a)} \right). \tag{18}$$

Момент M_a найдем из условия, что вертикальное перемещение сечения $x = a$ отсутствует

$$w(a) = w_0 - \frac{12(1 - \mu^2)}{Eh^3} \int\limits_0^a \left[\int\limits_0^s Mds \right] dx = 0. \tag{19}$$

Выполнив в (19) почленное интегрирование и заменив w_0 его значением по (18), найдем

$$M_a = pa^2 \frac{\dfrac{\varkappa^2}{12(1 - \mu^2)} \psi(a) + \Phi \cdot \psi(a) - \Psi \cdot \varphi(a)}{\dfrac{l}{a} \left[\dfrac{\varkappa^2}{12(1 - \mu^2)} + \Phi \right] - C \cdot \varphi(a)}. \tag{20}$$

Здесь

$$\Phi = \frac{1}{a}\int_0^a \varphi dx,\ \Psi = \frac{1}{a}\int_0^a \psi dx,\ C = \frac{1}{a^2}\int_0^a s dx,\ \varkappa = \frac{Rh}{a^2}. \qquad (21)$$

Зная M_a, из (18) найдем w_0

$$w_0 = \frac{pR^2}{Eh}\frac{\frac{a}{e}C\cdot\psi(a) - \Psi}{\frac{\varkappa^2}{12(1-\mu^2)} + \Phi - \frac{a}{e}\cdot C\cdot\varphi(a)}. \qquad (22)$$

Максимальная величина напряжения в сечении $x = a$ без учета концентрации напряжений

$$\sigma_a = 6\frac{M_a}{h^2}. \qquad (23)$$

Относительный угол разгиба пружины

$$\delta\gamma = w_0\frac{A}{a}. \qquad (24)$$

Неизвестную функцию v, входящую в решение, зададим приближенно в виде

$$v = 1 - \frac{7}{4}\frac{x^2}{a^2} + \frac{3}{4}\frac{x^4}{a^4} + \varepsilon\frac{x^2}{a^2}\left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right), \qquad (25)$$

причем

$$\varepsilon = \frac{16}{3}\frac{w'\left(\frac{a}{2}\right)}{w_0'} - \frac{13}{4}. \qquad (26)$$

Здесь ($'$) означает, что величины вычислены при $\varepsilon = 0$.

Полученное решение применено к расчету пружин плоскоовального сечения.

Для плоскоовального сечения, полагая в (25) $\varepsilon = 0$, найдем

$$J = 4hb^2(a-b)\left(1 - \frac{1}{12}\frac{h^2}{b^2}\right) + \frac{\pi}{4}\left[\left(b + \frac{h}{2}\right)^4 - \left(b - \frac{h}{2}\right)^4\right], \qquad (27)$$

$$A = \frac{34}{15}\frac{a^2bh}{J},\ C = \frac{1}{2} + \frac{\pi - 3}{2}\frac{b^2}{a^2}, \qquad (28)$$

$$\varphi(a) = \frac{5}{21} + 0{,}04\frac{b^2}{a^2} - \frac{ab^2h}{J}\left[\frac{34}{45} + 0{,}16\frac{b^2}{a^2} - 0{,}023\frac{b_3}{a^3}\right], \qquad (29)$$

$$\psi(a) = \frac{1}{3} - \left(2 - \frac{\pi}{2}\right)\frac{b^2}{a^2} + \left(\frac{5}{3} - \frac{\pi}{2}\right)\frac{b^3}{a^3}, \qquad (30)$$

$$\Psi(a) = \frac{5}{24} - \frac{1}{4}\frac{b_2}{a^2} + \left(\frac{3\pi}{4} - \frac{7}{3}\right)\frac{b^3}{a^3} + \left(\frac{19}{8} - \frac{3\pi}{4}\right)\frac{b^4}{a^4}, \qquad (31)$$

$$\Phi = 0{,}1523 + 0{,}0113\frac{b^3}{a^3} - \frac{ab^2h}{J}\left[0{,}472 + 0{,}04\frac{b^3}{a^3}\right]. \qquad (32)$$

Максимальное напряжение и относительный угол разгиба найдем по формулам (20) $\div$ (24), предварительно вычислив $\psi(a)$, $\varphi(a)$, Φ, Ψ, C по формулам (27) $\div$ (32). Учитывая, что задача об отыскании относительного угла разгиба $\delta\gamma$ плоскоовальной пружины решена ранее с достаточной точностью [1] и решение это широко применяется, рассмотрим другой вариант определения напряжений.

Из формул (18), (23), (24), (28) найдем

$$\sigma_a = p\frac{6a^3}{lh^2}\left[\psi(a) - \frac{E\cdot\delta\gamma}{p}\frac{15J\varphi(a)}{34abR^2}\right]. \qquad (33)$$

Вычислив $\delta\gamma$ по известным формулам [1], а $\varphi(a)$, $\psi(a)$, J по формулам (27), (29), (30), найдем максимальное напряжение изгиба σ_a.

Пример. Определить максимальное напряжение в пружине плоскоовального сечения размерами $R = 40$ *мм*, $a = 4$ *мм*, $b = 1$ *мм* $h = 0{,}16$ *мм* при давлении $p = 1$ *кг/см²*. Коэффициент Пуассона $\mu = 0{,}3$.

По формулам (27) ÷ (32) находим:

$$J = 0{,}243\cdot 10^{-3}\ \text{см}^4,\ \psi(a) = 0{,}308,\ \psi(a) = 0{,}039,$$
$$C = 0{,}504,\ \Psi = 0{,}193,\ \Phi = 0{,}0282. \qquad (34)$$

Максимальное напряжение по формулам (20), (22)

$$\sigma_a = 728\frac{\text{кг}}{\text{см}^2}.$$

Относительный угол разгиба по формулам (22), (24)

$$\delta\gamma = \frac{1{,}33\cdot 10^4}{E}.$$

По известным формулам Л. Е. Андреевой для плоскоовального сечения [2]

$$\sigma_a = 575\frac{\text{кг}}{\text{см}^2},\quad \delta\gamma = \frac{1{,}31\cdot 10^4}{E}.$$

По формулам Вюста для тонкостенных пружин [2]

$$\sigma_a = 727\frac{\text{кг}}{\text{см}^2},\quad \delta\gamma = \frac{1{,}39\cdot 10^4}{E}. \qquad (35)$$

Выводы

В работе рассмотрен вопрос о расчете манометрических пружин с произвольной формой сечения. Задача сводится к интегрированию известных функций. Найденное решение применено к расчету плоскоовальных пружин. Получены простые рабочие формулы для определения напряжений и перемещений. Сравнение на конкретном примере различных методов расчета показывает, что предлагаемый метод дает результаты, близкие к достаточно строго обоснованным результатам Вюста [4].

ЛИТЕРАТУРА

1. Л. Е. Андреева. Упругие элементы приборов. Машгиз, 1962.

2. W. Wuest. Die Berechnung von Bourdonfedern, «VDJ — Forschungsheft 489», приложение к «Forschung auf dem Gebiete des Ingenieurwesens», издание В., т. 28, 1962.