

СИНТЕЗ ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫХ МЕТОДОВ ИССЛЕДОВАНИЯ НАПРЯЖЕННОГО СОСТОЯНИЯ В ПЛАСТИЧЕСКОЙ ОБЛАСТИ

Г. Д. ДЕЛЬ

(Представлена научным семинаром кафедры сопротивления материалов)

Под экспериментальным определением напряженно-деформированного состояния понимают такое его определение, когда в результате эксперимента устанавливается распределение по объему тела одной или нескольких функций неизвестных напряжений $\sigma_x, \tau_{xy}, \dots$ и деформаций $\epsilon_x, \gamma_{xy}, \dots$:

$$f_n(\sigma_x, \tau_{xy}, \dots, \epsilon_x, \gamma_{xy}, \dots) = \psi_n(x, y, z), n = 1, 2, 3 \dots \quad (1)$$

Для определения напряженно-деформированного состояния, т. е. для расшифровки результатов эксперимента, уравнения (1) решаются совместно с дифференциальными уравнениями равновесия и уравнениями состояния, причем использование последних является менее желательным, так как они получены в предположениях, не всегда подтверждающихся экспериментом.

Наибольшее распространение получили методы, позволяющие определить деформированное, а по нему и напряженное состояние тела (это, прежде всего, метод делительных сеток, метод оптически чувствительных покрытий), и методы, позволяющие экспериментально установить распределение повышенного за счет наклепа предела текучести (метод измерения твердости, метод измерения магнитной проницаемости и т. д.).

При оценке различных методов экспериментального определения напряженного состояния в пластической области, на наш взгляд, следует руководствоваться следующими критериями:

1. Возможность определения в результате эксперимента всех компонент напряженного состояния.
2. Необходимый для расшифровки набор граничных условий.
3. Строгость метода. Имеются в виду допущения, в которых определяется напряженное состояние.
4. Область применения метода.
5. Трудоемкость эксперимента. Сложность и трудоемкость расшифровки.

Метод делительных сеток (как и метод оптически активных покрытий) позволяет определить деформированное состояние; по деформациям определяется интенсивность деформаций ϵ_i , а по последней

в предположении о единой кривой течения—и интенсивность напряжений σ_i . Затем определяются компоненты девиатора напряжений:

$$\left. \begin{aligned} s_x &= \frac{2}{3} \frac{\sigma_i}{\varepsilon_i} \varepsilon_{x,\dots} \\ \tau_{xy} &= \frac{\sigma_i}{3\varepsilon_i} \gamma_{xy,\dots} \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

Здесь

$$s_x = \sigma_x - \sigma, \quad (3)$$

где σ — гидростатическое давление. Нормальные напряжения получают, интегрируя дифференциальные уравнения равновесия [1]. Например,

$$\sigma_x = \int \left(-\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} - \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} \right) dx + \varphi(y, z). \quad (4)$$

Для определения постоянных интегрирования достаточно знать положение свободного контура. Напряжения σ_y и σ_z определяются из соотношений (3).

При исследовании двухосного напряженного состояния расшифровка значительно упрощается. Определив по (2) компоненты девиатора напряжений, а из уравнения

$$\sigma_z = \sigma + s_z = 0 \quad (5)$$

гидростатическое давление, можно в этом случае определить напряжения σ_x , σ_y непосредственно из (3).

Методом делительных сеток напряженное состояние определяется в следующих предположениях:

1. Кривая течения считается единой.
2. Направления главных напряжений считаются совпадающими с направлениями главных деформаций.
3. Компоненты девиаторов напряжений и деформаций считаются пропорциональными.

4. Материал считается сплошным, однородным и изотропным.

Расшифровку можно выполнить в общем случае.

Значительно ограничивает область применения метода сложность определения деформаций во внутренних областях. Для этой цели часто испытывают составные образцы. Сетку наносят на внутреннюю поверхность. Для того, чтобы связанное с этим нарушение сплошности образца не влияло на напряженное состояние, должны выполняться следующие условия: $\tau_{xz} = \tau_{yz} = 0$, $\sigma_z \leq 0$ (ось z направлена по нормали к поверхности с делительной сеткой). Напряжения σ_z должны уравновешиваться внешними силами.

Расшифровку можно выполнить, не используя соотношения (2). Так, в статьях [2, 3] описан метод определения напряжений на поверхности деформируемого тела и при плоской деформации по известной сетке траекторий главных деформаций (предполагается, что направления главных деформаций и главных напряжений совпадают). При этом отказываются от предположений 1 и 3. Материал может быть неоднородным.

Трудоемкость расшифровки при этом увеличивается, необходимый набор граничных условий расширяется.

Ниже речь будет идти о методе делительных сеток. Однако все результаты исследования будут в равной степени относиться и к методу оптически активных покрытий, так как информация о напряженно-деформированном состоянии, получаемая этими методами, является одинаковой.

Метод измерения твердости [4] позволяет определить распределение интенсивности напряжений. Следовательно, уравнения (1) в этом случае имеют вид:

$$(\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_x)^2 + 6(\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{xz}^2) = 2\sigma_i^2(x, y, z). \quad (6)$$

В том, что твердость связана непосредственно с интенсивностью напряжений и уже с точностью предположения о единой кривой течения с интенсивностью деформаций (на что уже указывалось [5]), убеждают результаты, полученные нами в условиях, когда единая связь между σ_i и ϵ_i не наблюдается.

Метод расшифровки результатов измерения твердости разработан применительно к кручению некруглых стержней, плоской и осесимметричной деформации [6]. При исследовании осесимметричной деформации расшифровка выполняется в предположении о равенстве окружного напряжения одному из главных в меридиональных плоскостях.

Расшифровка является трудоемкой и требует знания граничных условий вдоль всего контура. Напряженное состояние определяется в предположениях о сплошности и изотропности материала.

Рассмотрим возможности, возникающие в результате синтеза метода делительных сеток с методом измерения твердости (или любым другим методом, позволяющим определить распределение интенсивности напряжений).

Уже простое сочетание этих методов, когда методом делительных сеток определяется деформированное состояние, а измерением твердости — интенсивность напряжений, позволяет отказаться от предположения о единой кривой течения и однородности материала. Усложнение эксперимента является незначительным — путем испытания на кручение, сжатие или растяжение и параллельного измерения твердости строится тарировочный график „твердость — интенсивность напряжений“. Затем в ячейках деформированной сетки измеряется твердость, и из тарировочного графика определяется соответствующая ей интенсивность напряжений. Расшифровка выполняется так же, как и в случае исследования напряженного состояния, методом сеток. Ниже будет приведен пример такого исследования.

Рассмотрим методику определения напряженного состояния при известном поле главных направлений (определяемом методом сеток) и известном распределении интенсивности напряжений, устанавливаемом измерением твердости.

Напряженное состояние при этом определяется в следующих предположениях:

1. Направления главных напряжений считаются совпадающими с направлениями главных деформаций.

2. Материал считается сплошным и изотропным. Как будет показано, в ряде практически важных случаев расшифровка упрощается. Для ее выполнения достаточно знать положение свободного контура.

Таким образом, синтез указанных методов делает расшифровку более строгой по сравнению с методом делительных сеток при ис-

пользовании соотношений (2) и менее трудоемкой по сравнению с тем же методом без использования соотношений (2) и методом измерения твердости.

Плоское напряженное состояние. Уравнение (6) в этом случае принимает вид:

$$(\sigma_x - \sigma_y)^2 + \sigma_x^2 + \sigma_y^2 + 6\tau_{xy}^2 = 2\sigma_i^2(x, y). \quad (7)$$

Методом сеток получаем главные направления:

$$\frac{2\tau_{xy}}{\sigma_y - \sigma_x} = \operatorname{tg} 2\vartheta(x, y), \quad (8)$$

где ϑ — угол наклона касательной к траектории главного из напряжений σ_1 , отсчитываемый в положительном направлении от оси x .

Для расшифровки привлекаем дифференциальные уравнения равновесия:

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} = 0. \quad (9)$$

По соотношениям, справедливым для любого симметричного тензора:

$$\begin{aligned} \sigma_x &= \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2} + \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \cos 2\vartheta, \\ \sigma_y &= \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2} - \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \cos 2\vartheta, \\ \tau_{xy} &= \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \sin 2\vartheta, \end{aligned} \quad (10)$$

перейдем к новым переменным — главным напряжениям σ_1 и σ_2 . Затем, положив $\vartheta = 0$, перейдем к локальной системе координат, образованной касательными к траекториям главных напряжений. Направление траекторий σ_1 , σ_2 фиксируется таким образом, чтобы они образовывали правую систему координат. Через σ_1 может быть обозначено любое из главных напряжений.

Уравнение (8) отождествляется, а (7) и (9) принимает следующую форму:

$$\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - \sigma_1\sigma_2 = \sigma_i^2, \quad (11)$$

$$\frac{\partial \sigma_1}{\partial s_1} + (\sigma_1 - \sigma_2) \frac{\partial \vartheta}{\partial s_2} = 0, \quad (12)$$

$$\frac{\partial \sigma_2}{\partial s_2} + (\sigma_1 - \sigma_2) \frac{\partial \vartheta}{\partial s_1} = 0. \quad (13)$$

Здесь $\frac{\partial}{\partial s_1}$, $\frac{\partial}{\partial s_2}$ — производные вдоль траекторий σ_1 , σ_2 .

Рассмотрим методику определения главных напряжений вдоль траектории σ_1 . Пусть на границе L (рис. 1) заданы σ_1 и σ_2 (если L — свободная граница, главное напряжение, нормальное к контуру, равно нулю, второе напряжение равно $\pm \sigma_1$). Разобьем траекторию σ_1 на ряд достаточно малых отрезков длиной Δs_1 . Через концы этих отрезков проведем траектории σ_2 и отложим вдоль них по обе стороны от траектории σ_1 отрезки длиной Δs_2 .

В точке 1 согласно (12)

$$\left(\frac{\partial \sigma_1}{\partial s_1}\right)_1 = -(\sigma_1 - \sigma_2)_1 \frac{\vartheta_{11} - \vartheta_{21}}{2\Delta s_2}. \quad (14)$$

В точке 2

$$(\sigma_1)_2 = (\sigma_1)_1 + \left(\frac{\partial \sigma_1}{\partial s_1}\right)_1 \Delta s_1, \quad (15)$$

$$(\sigma_2)_2 = \frac{(\sigma_1)_2 \pm (\sigma_1)_2 \pm \sqrt{4(\sigma_1)_2^2 - 3(\sigma_1)_2^2}}{2}. \quad (16)$$

Запишем уравнение (12) для точки 2 в конечных разностях:

$$\frac{(\sigma_1)_3 - (\sigma_1)_1}{2\Delta s_1} + (\sigma_1 - \sigma_2)_2 \frac{\vartheta_{12} - \vartheta_{22}}{2\Delta s_2} = 0. \quad (17)$$

Отсюда имеем

$$(\sigma_1)_3 = (\sigma_1)_1 - (\sigma_1 - \sigma_2)_2 (k_1)_2, \quad (18)$$

где

$$(k_1)_2 = (\vartheta_{12} - \vartheta_{22}) \frac{\Delta s_1}{\Delta s_2}. \quad (19)$$

Напряжение σ_2 в точке 3 находим по формуле, аналогичной (16).

Главные напряжения для последующих точек определяем так же, как и для точки 3, т. е. по формулам

$$\left. \begin{aligned} (\sigma_1)_{n+1} &= (\sigma_1)_{n-1} - (\sigma_1 - \sigma_2)_n (k_1)_n, \\ (\sigma_2)_{n+1} &= \frac{(\sigma_1)_{n+1} \pm \sqrt{4(\sigma_1)_{n+1}^2 - 3(\sigma_1)_{n+1}^2}}{2}, \end{aligned} \right\} \quad (20)$$

где

$$(k_1)_n = (\vartheta_{1n} - \vartheta_{2n}) \frac{\Delta s_1}{\Delta s_2}. \quad (21)$$

Знак перед радикалом следует выбирать таким образом, чтобы не возникал разрыв напряжений. Если это условие выполняется при различных знаках (когда $\sigma_2 \approx \frac{\sigma_1}{2}$), то для выбора решения требуется знание дополнительных условий.

Вдоль траектории σ_2 главные напряжения определяются аналогично:

$$(\sigma_2)_{l+1} = (\sigma_2)_{l-1} - (\sigma_1 - \sigma_2)_l (k_2)_l, \quad (22)$$

$$(\sigma_1)_{l+1} = \frac{(\sigma_2)_{l+1} \pm \sqrt{4(\sigma_1)_{l+1}^2 - 3(\sigma_2)_{l+1}^2}}{2},$$

где

$$(k_2)_l = (\vartheta_{3l} - \vartheta_{4l}) \frac{\Delta s_2}{\Delta s_1}, \quad (23)$$

Зная величину σ_1 и σ_2 , можно определить по (10) напряжения σ_x , σ_y , τ_{xy} .

Для уменьшения погрешности определения k_1 и k_2 расшифровку следует начинать с построения графика изменения этих величин вдоль траекторий главных напряжений.

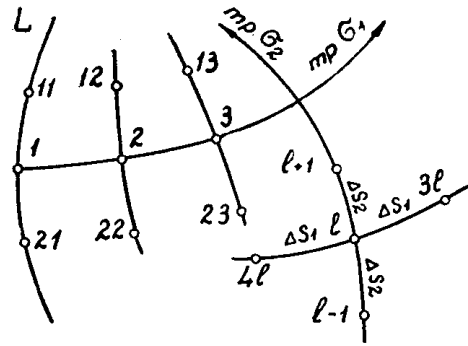


Рис. 1

Так как оси симметрии являются траекториями главных напряжений, предлагаемая методика особенно удобна для определения напряженного состояния вдоль этих осей.

Плоская деформация. Напряженное состояние при плоской деформации характеризуется напряжениями σ_x , σ_y , σ_z , τ_{xy} (ось z совпадает с направлением, в котором деформация равна нулю). Из условия несжимаемости следует [7]

$$\sigma_z = \frac{1}{2} (\sigma_x + \sigma_y). \quad (24)$$

При плоской деформации максимальное касательное напряжение пропорционально интенсивности напряжений:

$$\tau_{\max} = \frac{1}{\sqrt{3}} \sigma_i \quad (25)$$

и поэтому может быть установлено измерением твердости. Кроме того, известны направления главных напряжений, устанавливаемые методом делительных сеток. Следовательно, для определения напряжений σ_x , σ_y , τ_{xy} располагаем такой же информацией, как и при исследовании плоского напряженного состояния в упругой области поляриационно-оптическим методом. Уравнения равновесия в этих двух случаях совпадают. Поэтому при расшифровке результатов эксперимента в рассматриваемом случае можно воспользоваться всеми приемами, разработанными применительно к методу фотоупругости.

Рассмотрим методику определения напряженного состояния вдоль осей симметрии. При плоской деформации

$$\tau_{\max} = \sigma_1 - \sigma_2, \quad (26)$$

где σ_1 и σ_2 — главные напряжения в плоскости деформации, причем $\sigma_1 > \sigma_2$. Поэтому из уравнений (12) и (13), справедливых и для плоской деформации, следуют соотношения вдоль траектории σ_1 :

$$\left. \begin{aligned} \sigma_1 &= -\frac{1}{\sqrt{3}} \int \sigma_i \frac{\partial \vartheta}{\partial s_2} ds_1 + \varphi_1(s_2), \\ \sigma_2 &= \sigma_1 - \frac{1}{\sqrt{3}} \sigma_i, \end{aligned} \right\} \quad (27)$$

и вдоль траектории σ_2 :

$$\left. \begin{aligned} \sigma_2 &= -\frac{1}{\sqrt{3}} \int \sigma_i \frac{\partial \vartheta}{\partial s_1} ds_2 + \varphi_2(s_1), \\ \sigma_1 &= \sigma_2 + \frac{1}{\sqrt{3}} \sigma_i. \end{aligned} \right\} \quad (28)$$

Постоянные интегрирования определяются по граничным условиям.

Используя соотношения (27) и (28), можно определить напряженное состояние в исследуемой области, но более всего они удобны для определения напряжений вдоль осей симметрии. Пусть АВ (рис. 2) является отрезком оси симметрии, по которой действует напряжение σ_1 . Построим вдоль него кривую

$$\left(\frac{\partial \vartheta}{\partial s_2} \right)_n = \frac{\vartheta_{1n} - \vartheta_{2n}}{2\Delta s_2}, \quad (29)$$

затем построим график $\sigma_i \frac{\partial \vartheta}{\partial s_2}$. Напряжения в точке B определяются по соотношениям

$$\left. \begin{aligned} (\sigma_1)_B &= (\sigma_1)_A - \frac{1}{\sqrt{3}} \int_A^B \sigma_i \frac{\partial \vartheta}{\partial s_2} ds_1, \\ (\sigma_2)_B &= \frac{1}{\sqrt{3}} (\sigma_i)_B - (\sigma_1)_B. \end{aligned} \right\}$$

Величину интеграла можно определить графически, как площадь, заключенную под кривой $\sigma_i \frac{\partial \vartheta}{\partial s_2}$ между точками A и B .

Пример. По разработанной методике определено напряженное состояние при растяжении полосы с круговыми надрезами (рис. 3). На поверхность пластины, изготовленной из стали X13, до деформации была накатана делительная сетка из системы окружностей с базой в 1 мм. Затем полоса была растянута до интенсивности деформации в сечении $y = 0$ $\varepsilon_i \approx 0,35$. После деформации на инструментальном микроскопе был измерен угол наклона больших осей эллипсов в сечениях $y = \pm 2,5$ мм. Результаты измерения были графически усреднены. Затем вдоль оси x была измерена твердость. Она оказалась постоянной, что свидетельствует о

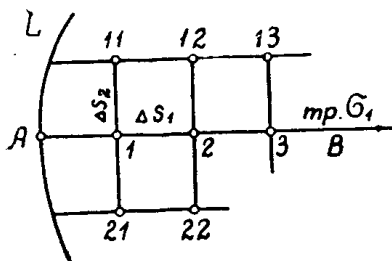


Рис. 2

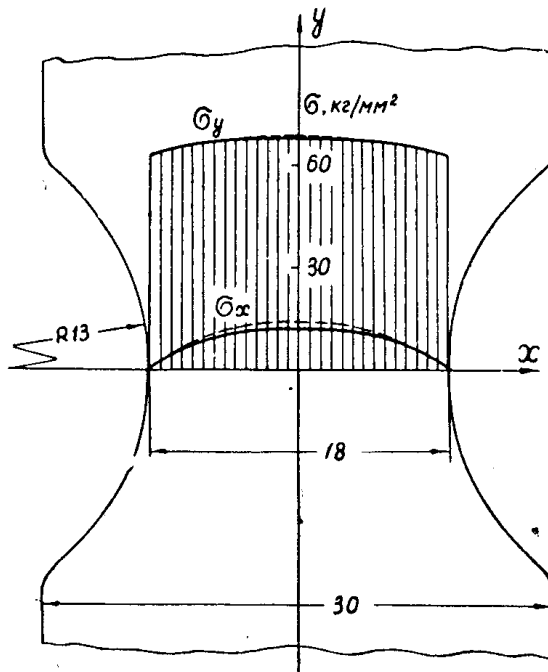


Рис. 3. Растяжение полосы с надрезами

постоянстве σ_i вдоль этой оси. Напряжения определялись по формулам (20).

Параллельно выполнялась расшифровка с использованием соотношений (2). Для этого вдоль линий $y = \pm 2,5$ мм были построены эпюры касательных напряжений, определяемых по формулам (2), в которых

$$\gamma_{xy} = \operatorname{tg} \vartheta. \quad (30)$$

Затем вдоль оси x был построен график изменения $\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y}$. Напряже-

ния σ_x определялись графическим интегрированием по формулам

$$(\sigma_x)_B = (\sigma_x)_A - \int_A^B \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} dx.$$

Напряжения σ_y определялись по известной σ_x . Эпюры напряжений, полученные этими методами, практически совпали.

Как уже указывалось, вдоль оси x σ_x была постоянной. Однако это еще не является достаточным условием для применения в рассматриваемом случае аппарата теории идеально пластических тел, так как вдоль оси y наблюдалось интенсивное изменение σ_x . Тем не менее, полученные результаты находятся в хорошем соответствии с результатами, полученными аналитически для неупрочняющегося материала [7].

В заключение укажем на следующее обстоятельство. Часто исследование методом делительных сеток и оптическим методом выполняются на малоупрочняющихся материалах (например, на свинце). В этом случае можно положить $\sigma_x = \text{const}$ во всей пластической области. Это дает возможность применять предлагаемую методику расшифровки без измерения твердости. Значительно упрощается методика и при исследовании плоского напряженного состояния с осевой симметрией. В этом случае известны направления главных напряжений — одно из них совпадает с радиальным, другое — с окружным направлением.

ЛИТЕРАТУРА

1. А. А. Поздеев, В. И. Тарновский. Известия высших учебных заведений, Черная металлургия, № 11, 1962.
2. А. Е. Александров, М. Х. Ахметзянов, ПМТФ, № 6, 1961.
3. П. И. Полухин, В. К. Воронцов. Известия высших учебных заведений. Черная металлургия, № 11, 1962.
4. Г. А. Смирнов-Аляев. Сопrotивление материалов пластическому деформированию, Машгиз, 1961.
5. А. М. Розенберг, А. Н. Еремин. Элементы теории процесса резания металлов, Машгиз, 1956.
6. Г. Д. Дель. Известия ТПИ, т. 138, № 1, 1965.
7. Л. М. Качанов. Основы теории пластичности, ГИТТЛ, 1956.