

ТЕМПЕРАТУРНЫЙ РЕЖИМ ДЕТАЛЕЙ
ЭЛЕКТРОТЕХНИЧЕСКИХ УСТРОЙСТВ,
ОХЛАЖДАЕМЫХ РАДИАЦИЕЙ

В. В. ИВАНОВ, А. В. ФУРМАН

(Представлена проф. Г. И. Фуксом)

При расчете температурных полей в электрических нагревателях, катушках, магнитопроводах и т. д. нередко встречаются случаи, когда все выделенное тепло отводится с поверхности радиацией. В таких условиях работают некоторые детали электротехнических устройств, находящиеся в вакууме, нагреватели, у которых из-за высокой температуры поверхности отвод тепла осуществляется преимущественно лучеиспусканием и т. д.

Нахождение точного аналитического решения температурного поля в этих случаях затруднено в связи с нелинейностью граничного условия, выраженного законом Стефана—Больцмана

$$-\lambda(\text{grad } T)_{\text{пов}} = \sigma_{\text{в}}(T_{\text{пов}}^4 - T_{\text{с}}^4).$$

В настоящей статье, на примере охлаждения лучеиспусканием катушки сплошного круглого сечения, внутри которой выделяется джоулево тепло, предлагается приближенный, но достаточно простой и надежный способ нахождения нестационарного температурного поля.

Математическая постановка задачи имеет следующий вид:

$$\frac{\partial \Theta(\rho, F_0)}{\partial F_0} = \frac{\partial^2 \Theta(\rho, F_0)}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \Theta(\rho, F_0)}{\partial \rho} + P_0, \quad (1)$$

$$0 \leq F_0 \leq \infty, \quad -1 \leq \rho \leq 1,$$

$$\frac{\partial \Theta(1, F_0)}{\partial \rho} + Sk_* [\Theta^4(1, F_0) - 1] = 0, \quad (2)$$

$$\frac{\partial \Theta(0, F_0)}{\partial \rho} = 0, \quad (3)$$

$$\Theta(\rho, 0) = \Theta_{\text{н}}. \quad (4)$$

Представим искомое решение для $\Theta(\rho, F_0)$ в виде суммы

$$\Theta(\rho, F_0) = U(\rho, F_0) + \omega(\rho) - D,$$

в которой величина $\omega(\rho)$ является решением системы (1)–(4) при $F_0 \rightarrow \infty$, то есть стационарной температурой

$$\omega(\rho) = P_0/4(1 - \rho^2) + D, \quad D = \sqrt[4]{1 + P_0/2Sk_*}.$$

Функция $U(\rho, F_0)$ находится из условий

$$\frac{\partial U(\rho, F_0)}{\partial F_0} = \frac{\partial^2 U(\rho, F_0)}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial U(\rho, F_0)}{\partial \rho}, \quad (5)$$

$$\frac{\partial U(1, F_0)}{\partial \rho} + Sk_* [U^4(1, F_0) - D^4] = 0 \quad (6)$$

$$\frac{\partial U(0, F_0)}{\partial \rho} = 0, \quad (7)$$

$$U(\rho, 0) = \Theta_n + P_0/4(\rho^2 - 1). \quad (8)$$

Если ввести новую переменную $Z(\rho, F_0)$, определяемую уравнением

$$Z(\rho, F_0) = \frac{1}{2D^3} \left[\text{Arth} \frac{U(\rho, F_0)}{D} + \text{arctg} \frac{U(\rho, F_0)}{D} \right], \quad (9)$$

то граничное условие (6) линеаризуется

$$\frac{\partial Z(1, F_0)}{\partial \rho} = Sk_* \quad (10)$$

Условие симметрии не изменяется

$$\frac{\partial Z(0, F_0)}{\partial \rho} = 0, \quad (11)$$

а начальное условие запишется так:

$$Z(\rho, 0) = \frac{1}{2D^3} \left[\text{Arth} \frac{\Theta_n + P_0/4(\rho^2 - 1)}{D} + \text{arctg} \frac{\Theta_n + P_0/4(\rho^2 - 1)}{D} \right] = F(\rho) \quad (12)$$

Отметим, что поскольку $\text{Arth } \alpha$ существует при $|\alpha| < 1$, то подстановкой (9) можно пользоваться в случае, если

$$|\Theta_n - P_0/4| < D.$$

Уравнение теплопроводности (5) для $Z(\rho, F_0)$ примет вид

$$\frac{\partial Z(\rho, F_0)}{\partial F_0} = \frac{\partial^2 Z(\rho, F_0)}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial Z(\rho, F_0)}{\partial \rho} - f,$$

где

$$f = 4 \frac{\left[\frac{\partial U(\rho, F_0)}{\partial \rho} \right]^2 \cdot U^3(\rho, F_0)}{[D^4 - U^4(\rho, F_0)]^2}.$$

Нетрудно видеть, что функция $f \geq 0$ и меняется от нуля при $\rho = 0$ до своего наибольшего значения при $\rho = 1$. Для достаточно тонких и теплопроводных тел величиной f можно пренебречь и тогда

$$\frac{\partial Z(\rho, F)}{\partial F_0} \cong \frac{\partial^2 Z(\rho, F_0)}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial Z(\rho, F_0)}{\partial \rho}. \quad (13)$$

Общее решение задачи (10) ÷ (13) получено в [1]

$$\begin{aligned}
 Z(\rho, F_0) = & 2 \int_0^1 \xi F(\xi) d\xi + 2 \int_0^{F_0} Sk_* d\eta + \\
 & + 2 \sum_{m=1}^{\infty} \frac{I_0(\mu_m \rho)}{I_0^2(\mu_m)} \exp(-\mu_m^2 F_0) \int_0^1 \xi F(\xi) I_0(\mu_m \xi) d\xi + \\
 & + 2 Sk_* \sum_{m=1}^{\infty} \frac{I_0(\mu_m \rho)}{I_0(\mu_m)} \exp(-\mu_m^2 F_0) \int_0^{F_0} \exp(-\mu_m^2 \eta) d\eta, \quad (14)
 \end{aligned}$$

где μ_m — корни уравнения $I_1(\mu_m) = 0$, приведенные в [2].

На рис. 1 представлена зависимость U/D от $Z \cdot D^3$. Как видно из графика, в области $Z \cdot D^3 \leq 0,6$ функция U/D имеет вид близкий

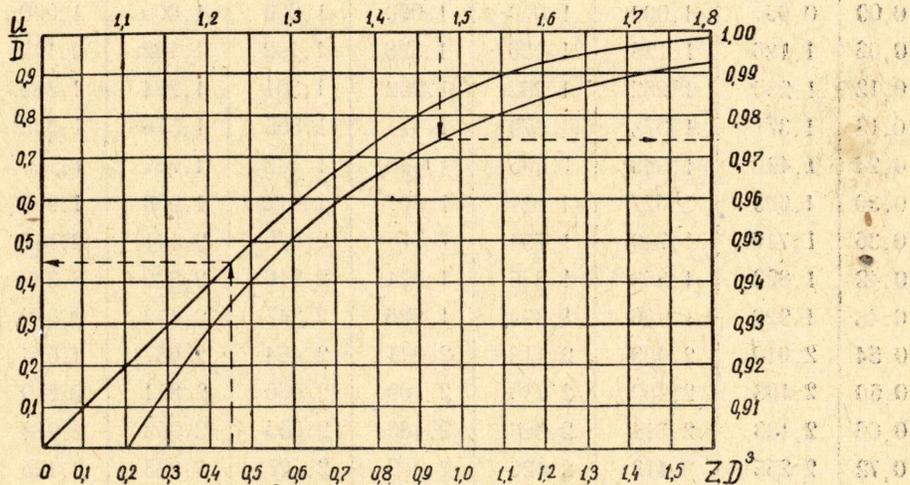


Рис. 1. Зависимость $Z(\rho, F_0) \cdot D^3 = \frac{1}{2} \left[\text{Arth} \frac{U(\rho, F_0)}{D} + \arctg \frac{U(\rho, F_0)}{D} \right]$.

к прямой, направленной под углом $\varphi = 45^\circ$. Поэтому в этой области начальное распределение температуры можно представить

$$F(\rho) \cdot D^4 \cong \Theta_n + P_0/4(\rho^2 - 1).$$

Тогда решение (14) примет вид

$$\begin{aligned}
 Z(\rho, F_0) \cdot D^4 = & \Theta_n - \frac{P_0}{8} + \left(Sk_* + \frac{P_0}{2} \right) \left[2F_0 - \frac{1}{4}(1 - 2\rho^2) \right] - \\
 & - Sk_* \cdot \sum_{m=1}^{\infty} \frac{2}{\mu_m^2 I_0(\mu_m)} I_0(\mu_m \rho) \times \exp(-\mu_m^2 F_0).
 \end{aligned}$$

Проведенные численные расчеты методом конечных разностей [3] показали, что для $P_0 \leq 3,5$ и $Sk_* \leq 0,02$ погрешность вычисления температуры по предлагаемой методике не превышает 5%. С уменьшением P_0 или Sk_* , или P_0 и Sk_* одновременно точность расчета повышается.

Для области $Z \cdot D^3 > 0,6$ интегралы, входящие в решение (14), могут быть определены графически.

В табл. 1 сделано сравнение значений температур, вычисленных на основе предлагаемой методики и по способу [3] для случаев: $\Theta_n = 1$, $Sk_* = 0,02$, $P_0 = 3,2$ и $P_0 = 2,1$.

Таблица 1

F_0	$P_0=2,1 \quad S_{k_*}=0,02$				$P_0=3,2 \quad S_{k_*}=0,02$			
	По методу [3]		По предлагаемой методике		По методу [3]		По предлагаемой методике	
	$\Theta_{\rho=1}$	$\Theta_{\rho=0}$	$\Theta_{\rho=0}$	$\Theta_{\rho=1}$	$\Theta_{\rho=1}$	$\Theta_{\rho=0}$	$\Theta_{\rho=0}$	$\Theta_{\rho=1}$
0,00	0,00	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000
0,06	1,126	1,126	1,126	1,126	1,192	1,192	1,192	1,192
0,12	1,250	1,252	1,252	1,252	1,381	1,384	1,384	1,381
0,18	1,371	1,378	1,379	1,371	1,565	1,576	1,578	1,565
0,24	1,490	1,503	1,505	1,490	1,743	1,767	1,769	1,743
0,30	1,605	1,627	1,629	1,607	1,912	1,955	1,961	1,914
0,36	1,716	1,749	1,754	1,718	2,070	2,141	2,147	2,070
0,42	1,822	1,869	1,875	1,824	2,216	2,320	2,330	2,216
0,48	1,922	1,986	1,994	1,926	2,347	2,492	2,510	2,347
0,54	2,016	2,099	2,118	2,025	2,464	2,657	2,684	2,464
0,60	2,103	2,209	2,210	2,109	2,566	2,811	2,840	2,566
0,66	2,183	2,314	2,326	2,186	2,653	2,953	2,984	2,700
0,72	2,255	2,412	2,426	2,260	2,727	3,083	3,125	2,770
0,78	2,321	2,505	2,520	2,327	2,789	3,198	3,234	2,790
0,84	2,380	2,592	2,604	2,383	2,842	3,301	3,335	2,843
0,90	2,433	2,671	2,685	2,437	2,885	3,391	3,425	2,890
0,96	2,479	2,744	2,752	2,483	2,920	3,469	3,500	2,980
1,02	2,519	2,811	2,820	2,522	2,950	3,536	3,560	2,952

Выводы

Результаты, полученные в работе, могут быть использованы для расчета температурных полей в деталях электротехнических устройств, охлаждаемых радиацией, а также для оценки времени прогрева отдельных частей до заданной температуры, что особенно важно для периода пуска и в прерывистом режиме работы.

Обозначения

$\Theta(\rho, F_0) = T(\rho, F_0)/T_c$ — относительная температура,

$\rho = r/R$ — относительный радиус,

T_c — температура среды,

$Sk_* = \sigma_b T_c^3 R/\lambda$ — радиационный критерий Старка,

$F_0 = a\tau/R^2$ — критерий Фурье,

$P_0 = q_v R^2/\lambda T_c$ — критерий Померанцева,

λ, a — коэффициенты тепло- и температуропроводности,

R — радиус катушки,

τ — время нагрева,

qv — джоулево тепло.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ю. А. Самойлович, Е. П. Блохин. Инженерный способ расчета нагрева слитков и заготовок в пламенных печах. Сб. трудов ВНИИМТ, № 10, 1960.
2. А. В. Лыков. Теория теплопроводности. Гостехиздат, 1952.
3. В. К. Саульев. Интегрирование уравнений параболического типа. Физматгиз, 1960.