ИЗВЕСТИЯ
ТОМСКОГО ОРДЕНА ТРУДОВОГО КРАСНОГО ЗНАМЕНИ ПОЛИТЕХНИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА имени С. М. КИРОВА

Том 154 1967

# О ЧИСЛЕ НЕВЫПУКЛЫХ И ВЫПУКЛЫХ ЧЕТВЕРОК В ПЛОСКОЙ ТОЧЕЧНОЙ СИСТЕМЕ

Г. Г. ПЕСТОВ

(Представлена кафедрой инженерной и вычислительной математики)

**Лемма 1.** Дана $S_4=\{a, b, c, d\}$. Величина

$$\varsigma(a, b, c)\varsigma(a, b, d)\varsigma(c, d, a)\varsigma(c, d, b)$$

равна $+1$ или $-1$, в зависимости от того, будет ли $C(S_4)=1$ или $0$.

**Доказательство.** Заметим, что функция

$$\varphi(a, b, c, d)=\varsigma(a, b, c)\varsigma(a, b, d)\varsigma(c, d, a)\varsigma(c, d, b)$$

не меняется при перестановке аргументов.

В самом деле:

$$\varphi(b, a, c, d)=\varsigma(b, a, c)\varsigma(b, a, d)\varsigma(c, d, b)\varsigma(c, d, a)=$$
$$=\varsigma(a, b, c)\varsigma(a, b, d)\varsigma(c, d, a)\varsigma(c, d, b)=\varphi(a, b, c, d).$$

Так же

$$\varphi(a, c, b, d)=\varphi(a, b, d, c)=\varphi(a, b, c, d).$$

а) Пусть $S_4$ — выпуклая. В силу предыдущего можно считать, что точки $a, b, c, d$ расположены в естественном порядке [1]. Тогда

$$\varsigma(a, b, c)=\varsigma(a, b, d)=\varsigma(c, d, a)=\varsigma(c, d, b)=+1.$$

Следовательно,

$$\varphi(a, b, c, d)=+1.$$

в) Пусть $S_4$ — невыпуклая. Пусть $a, b, c$ — внешние точки, расположенные в естественном порядке, и точка $d$—внутренняя. Тогда

$$\varsigma(a, b, c)=\varsigma(a, b, d)=+1,$$
$$\varsigma(c, d, a)\varsigma(c, d, b)=-1.$$

Следовательно,

$$\varphi(a, b, c, d)=-1.$$

**Лемма 2.** Пусть $S_5=\{a, b, x_1, x_2, x_3\}$. Тогда

$$C(S_5\diagdown\{a\})-C(S_5\diagdown\{b\})=\frac{1}{2}\sum_{x, y, z\in S_5}\varsigma(x, y, z)\varsigma(x, y, b)\varsigma(a, b, x)\varsigma(a, b, y).$$
$$x, y\,|\,\varsigma(x, y, a)\varsigma(x, y, b)<0.$$

**Доказательство:** В силу леммы 1.4 из [2]:

$$\varsigma(b, x_1, x_2)\varsigma(b, x_2, x_3)\varsigma(b, x_3, x_1)+\varsigma(b, x_1, x_2)\varsigma(a, b, x_1)\varsigma(a, b, x_2)+$$

$$+\varsigma(b,x_2,x_3)\varsigma(a,b,x_2)\varsigma(a,b,x_3)+\varsigma(b,x_3,x_1)\varsigma(a,b,x_3)\varsigma(a,b,x_1)=$$
$$=\varsigma(a,x_1,x_2)\varsigma(a,x_2,x_3)\varsigma(a,x_3,x_1)+\varsigma(a,x_1,x_2)\varsigma(a,b,x_1)\varsigma(a,b,x_2)+$$
$$+\varsigma(a,x_2,x_3)\varsigma(a,b,x_2)\varsigma(a,b,x_3)+\varsigma(a,x_3,x_1)\varsigma(a,b,x_3)\varsigma(a,b,x_1).$$

Произведем перегруппировку слагаемых:

$$-\varsigma(b,x_1,x_2)\varsigma(b,x_2,x_3)\varsigma(b,x_3,x_1)+\varsigma(a,x_1,x_2)\varsigma(a,x_2,x_3)\varsigma(a,x_3,x_1)=$$
$$=\varsigma(b,x_1,x_2)\varsigma(a,b,x_1)\varsigma(a,b,x_2)-\varsigma(a,x_1,x_2)\varsigma(a,b,x_1)\varsigma(a,b,x_2)+$$
$$+\varsigma(b,x_2,x_3)\varsigma(a,b,x_2)\varsigma(a,b,x_3)-\varsigma(a,x_2,x_3)\varsigma(a,b,x_2)\varsigma(a,b,x_3)+$$
$$+\varsigma(b,x_3,x_1)\varsigma(a,b,x_3)\varsigma(a,b,x_1)-\varsigma(a,x_3,x_1)\varsigma(a,b,x_3)\varsigma(a,b,x_1).$$

Умножая все слагаемые на $\varsigma(x_1,x_2,x_3)$ и производя простые преобразования:

$$\varsigma(b,x_1,x_2)\varsigma(b,x_1,x_3)\varsigma(x_2,x_3,b)\varsigma(x_2,x_3,x_1)-$$
$$-\varsigma(a,x_1,x_2)\varsigma(a,x_1,x_3)\varsigma(x_2,x_3,a)\varsigma(x_2,x_3,x_1)=$$
$$=[1-\varsigma(x_1,x_2,a)\varsigma(x_1,x_2,b)]\varsigma(x_1,x_2,x_3)\varsigma(x_1,x_2,b)\varsigma(a,b,x_1)\varsigma(a,b,x_2)+$$
$$+[1-\varsigma(x_2,x_3,a)\varsigma(x_2,x_3,b)]\varsigma(x_2,x_3,x_1)\varsigma(x_2,x_3,b)\varsigma(a,b,x_2)\varsigma(a,b,x_3)+$$
$$+[1-\varsigma(x_3,x_1,a)\zeta(x_3,x_1,b)]\varsigma(x_3,x_1,x_2)\varsigma(x_3,x_1,b)\varsigma(a,b,x_3)\varsigma(a,b,x_1)=$$
$$=\frac{1}{2}\Big\{[1-\varsigma(x_1,x_2,a)\varsigma(x_1,x_2,b)]\varsigma(x_1,x_2,x_3)\varsigma(x_1,x_2,b)\varsigma(a,b,x_1)\varsigma(a,b,x_2)+$$
$$+[1-\varsigma(x_2,x_1,a)\varsigma(x_2,x_1,b)]\varsigma(x_2,x_1,x_3)\varsigma(x_2,x_1,b)\varsigma(a,b,x_2)\varsigma(a,b,x_1)+$$
$$+[1-\varsigma(x_2,x_3,a)\varsigma(x_2,x_3,b)]\varsigma(x_2,x_3,x_1)\varsigma(x_2,x_3,b)\varsigma(a,b,x_2)\varsigma(a,b,x_3)+$$
$$+[1-\varsigma(x_3,x_2,a)\varsigma(x_3,x_2,b)]\varsigma(x_3,x_2,x_1)\varsigma(x_3,x_2,b)\varsigma(a,b,x_3)\varsigma(a,b,x_2)+$$
$$+[1-\varsigma(x_3,x_1,a)\varsigma(x_3,x_1,b)]\varsigma(x_3,x_1,x_2)\varsigma(x_3,x_1,b)\varsigma(a,b,x_3)\varsigma(a,b,x_1)+$$
$$+[1-\varsigma(x_1,x_3,a)\varsigma(x_1,x_3,b)]\varsigma(x_1,x_3,x_2)\varsigma(x_1,x_3,b)\varsigma(a,b,x_1)\varsigma(a,b,x_3)]\Big\}=$$
$$=\frac{1}{2}\sum_{x,y,z\in S_5/\{a,b\}}[1-\varsigma(x,y,a)\varsigma(x,y,b)]\varsigma(x,y,z)\varsigma(x,y,b)\varsigma(a,b,x)\varsigma(a,b,y)=$$
$$=\sum_{x,y,z\in S_5\setminus\{a,b\}}\varsigma(x,y,z)\varsigma(x,y,b)\varsigma(a,b,x)\varsigma(a,b,y).$$
$$x,y\,|\,\varsigma(x,y,a)\varsigma(x,y,b)<0.$$

Но выражение в левой части предыдущего равенства, в силу леммы 1, есть

$$2\,[C(S_5\setminus\{a\}-C(S_5\setminus\{b\})].$$

Поэтому

$$C(S_5\setminus\{a\}-C(S_5)\setminus\{b\})=\frac{1}{2}\sum_{x,y,z\in S_5}\varsigma(x,y,z)\varsigma(x,y,b)\varsigma(a,b,x)\varsigma(a,b,y).$$
$$x,y\,|\,\varsigma(x,y,a)\varsigma(x,y,b)<0,$$

что и требовалось доказать.

**Теорема 3.** Пусть $a,b\in S$. Тогда

$$C(S\setminus\{a\})-C(S\setminus\{b\})=\sum_{i<j}\gamma_{ij}\varsigma(b,x_i,x_j)\varsigma(a,b,x_i)\varsigma(a,b,x_j).$$
$$x_i,x_j\,|\,\varsigma(x_i,x_j,a)\varsigma(x_i,x_j,b)<0.$$

**Доказательство:**

$$C(S\setminus\{a\})-C(S\setminus\{b\})=\sum_{\substack{S_5\subset S\\ a,b,\in S_5}}C(S_5\setminus\{a\})-C(S_5\setminus\{b\})=$$

$$=\frac{1}{2}\sum_{x,\,y|\zeta(x,\,y,\,a)\zeta(x,\,y,\,b)<0}\varsigma(x,y,z)\,\varsigma(x,y,b)\,\varsigma(a,b,x)\,\varsigma(a,b,y)=$$

$$=\frac{1}{2}\sum_{x,\,y|\zeta(x,\,y,\,a)\zeta(x,\,y,\,b)<0}\varsigma(x,y,b)\,\varsigma(a,b,x)\,\varsigma(a,b,y)\sum_{z\neq x,\,y}\varsigma(x,y,z)=$$

$$=\frac{1}{2}\sum_{x,\,y|\zeta(x,\,y,\,a)\zeta(x,\,y,\,b)<0}\gamma_{xy}\varsigma(x,y,b)\,\varsigma(a,b,x)\,\varsigma(a,b,y)=$$

$$=\sum_{i<j}\gamma_{ij}\varsigma(x_i,x_j,b)\,\varsigma(a,b,x_i)\,\varsigma(a,b,x_j),$$

$$x_ix_j\,|\,\varsigma(x_i,\ x_j,\ a)\,\varsigma(x_i,\ x_j,\ b)<0,$$

где $\gamma_{ij}=|L(x_i,x_j)|-|R(x_i,x_j)|$,
что и требовалось доказать.

## Некоторые следствия

Пусть

$$S_{n+r}\setminus S_n=\{a_1,a_2,\ldots,a_r\}.$$

Тогда, по теореме 3:

$$C(S_n\cup\{a_{i+1}\})-C(S_n\cup\{a_i\})=$$

$$=\sum_{\kappa<l}\gamma_{\kappa l}\varsigma(x_\kappa,\ x_l,a_{i+1})\,\varsigma(a_{i+1},a_i,x_\kappa)\,\varsigma(a_{i+1},\ a_i,\ x_l).$$

$$x_\kappa,x_l\,|\,\varsigma(x_\kappa,x_l,a_i)\,\varsigma(x_\kappa,\ x_l,a_{i+1})<0.$$

Суммируя по $i$, имеем:

$$C(S_n\cup\{a_r\})-C(S_n\cup\{a_1\})=$$

$$=\sum_{i=1}^{r-1}\sum_{x_\kappa,\ x_l|\zeta(x_\kappa,\ x_l,\ a_i)\zeta(x_\kappa,x_l,a_{i+1})<0}\gamma_{\kappa,l}\varsigma(x_\kappa,\ x_l,\ a_{i+1})\,\varsigma(a_{i+1},a_i,\ x_\kappa)\,\varsigma(a_{i+1},\ a_i,\ x_l).$$

В частности, если $a_r=a_1$, получим:

$$\sum_{i=1}^{r-1}\sum_{x_\kappa,x_l|\zeta(x_\kappa,x_l,a_i)\zeta(x_\kappa,x_l,a_{i+1})<0}\gamma_{\kappa l}\varsigma(x_\kappa,x_l,\ a_{i+1})\,\varsigma(a_{i+1},a_i,\ x_\kappa)\,\varsigma(a_{i+1},a_i,x_l)=0.$$

## ЛИТЕРАТУРА


1. Г. Г. Пестов. Теоремы о внешних точках и гранях $n$-мерной точечной системы, Геометрический сборник ТГУ, 1966.
2. Г. Г. Пестов. $n$-мерные точечные системы, там же.