ИЗВЕСТИЯ
ТОМСКОГО ОРДЕНА ТРУДОВОГО КРАСНОГО ЗНАМЕНИ ПОЛИТЕХНИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА имени С. М. КИРОВА

Том 154 1967

НЕОБХОДИМЫЕ ПРИЗНАКИ НАИМЕНЬШЕЙ ВЫПУКЛОСТИ ТОЧЕЧНОЙ СИСТЕМЫ

Г. Г. ПЕСТОВ

(Представлена кафедрой инженерной и вычислительной математики)

Пусть S_n наименее выпуклая точечная система [1], $a, b \in S_n$. Введем систему $S' = S_n \cup \{b_1\}$:

$$\varsigma'(x, y, z) = \begin{cases} \varsigma(x, y, z), & \text{если } x, y, z \neq b_1, \\ \varsigma(x, y, b), & \text{если } x, y \neq b,\ z = b_1, \\ \varsigma(a, b, x), & \text{если } x = b_1,\ y = b, \\ +1, & \text{если } x = a, y = b,\ z = b_1. \end{cases}$$

Обозначим через γ_{ij}, γ'_{ij} индекс пары x_i, x_j в системах S и S':

$$\gamma_{ij} = |L(x_i, x_j)| - |R(x_i, x_j)|,\quad \gamma'_{ij} = |L'(x_i, x_j)| - |R'(x_i, x_j)|.$$

Введем систему S'' следующим образом: $S'' = (S_n \setminus \{a\} \cup \{b_2\})$.
Пусть d таково, что

$$L(d, b) = \left[\frac{n-1}{2}\right].$$

Положим:

$$\varsigma''(x, y, z) = \begin{cases} \varsigma(x, y, z), & \text{если } x, y, z \neq b_2, \\ \varsigma(x, y, b), & \text{если } x, y \neq b,\ z = b_2, \\ \varsigma(d, b, x), & \text{если } x = b_2,\ y = b, \\ +1, & \text{если } x = a,\ y = b, z = b_2. \end{cases}$$

а)
$$C(S' \setminus \{a\}) - C(S' \setminus \{b_1\}) =$$

$$= \sum_{\substack{i<j \\ x_i x_j | \varsigma'(x_i, x_j, a)\varsigma'(x_i, x_j, b_1) < 0}} \gamma'_{ij} \varsigma'(b_1, x_i, x_j)\, \varsigma'(a, b_1, x_i)\, \varsigma'(a, b_1, x_j) =$$

(I)

$$= \sum_{\substack{i<j \\ x_i, x_j | \varsigma(x_i, x_j, a)\varsigma(x_i, x_j, b) < 0}} \gamma'_{ij} \varsigma(b, x_i, x_j)\, \varsigma(a, b, x_i)\, \varsigma(a, b, x_j) \qquad \text{(см. [2])}.$$

Далее для $x_i, x_j \in S_n$:

$$\gamma'_{ij} = \sum_{z \in S'} \varsigma'(x_i, x_j, z) = \sum_{z \in S_n} \varsigma(x_i, x_j, z) + \varsigma'(x_i, y_j, b_1) =$$

$$= \sum_{z \in S_n} \varsigma(x_i, x_j, z) + \varsigma(x_i, x_j, b) = \gamma_{ij} + \varsigma(x_i, x_j, b).$$

Итак,

(II) $$\gamma'_{ij} = \gamma_{ij} + \varsigma(x_i, x_j, b).$$

Из (I) и (II) получим:

(III)
$$C(S'/\{a\}) - C(S'/\{b_1\}) =$$
$$= \sum_{\substack{i<j \\ x_i, x_j | \zeta(x_i, x_j, a)\zeta(x_i, x_j, b)<0}} [\gamma_{ij}\varsigma(b, x_i, x_j)\varsigma(a, b, x_i)\varsigma(a, b, x_j) +$$
$$+ \varsigma(x_i, x_j, b)\varsigma(b, x_i, x_j)\varsigma(a, b, x_i)\varsigma(a, b, x_j)] =$$
$$= \sum_{\substack{i<j \\ x_i, x_j | \zeta(x_i, x_j, a)\zeta(x_i, x_j, b)<0}} [\gamma_{ij}\varsigma(b, x_i, x_j)\varsigma(a, b, x_i)\varsigma(a, b, x_j) +$$
$$+ \varsigma(a, b, x_i)\varsigma(a, b, x_j)].$$

в) Вычислим разность:

$$C(S'') - C(S' \setminus \{a'\}).$$

Обозначим $C_0(S'')$ и $C_0(S' \setminus \{a\})$ число выпуклых четверок в S'' и $S' \setminus \{a\}$, не содержащих b_1 и b_2; через $C_{b_2}(S'')$ и $C_{b_1}(S' \setminus \{a\})$— количество выпуклых четверок с b_2 и b_1 и без точки b; через $C_{b\,b_2}(S'')$ и $C_{b\,b_1}(S' \setminus \{a\})$— количество выпуклых четверок с $\{b, b_2\}$ и с $\{b, b_1\}$.

Из определения S' и S'' следует:

(IV) $$C_0(S'') = C_0(S' \setminus \{a\}),$$

(V) $$C_{b_2}(S'') = C_{b_1}(S' \setminus \{a\}).$$

Далее

$$|L(a, b)| = \frac{n-2+\gamma_{ab}}{2}, \quad |R(a, b)| = \frac{n-2-\gamma_{ab}}{2}.$$

Поэтому из определения S' и S'' следует:

$$C_{b\,b_1}(S' \setminus \{a\}) = C_n^4 - \frac{n-2+\gamma_{ab}}{2} \cdot \frac{n-2-\gamma_{ab}}{2} =$$
$$= C_n^4 - \frac{(n-2)^2 - \gamma_{ab}^2}{4}.$$
$$C_{bb_2}(S'') = C_n^4 - \left[\frac{n-2}{2}\right] \cdot \left[\frac{n-1}{2}\right].$$

Следовательно,

$$C_{bb_2}(S'') - C_{bb_1}(S' \setminus \{a\}) - \frac{(n-2)^2 - \gamma_{ab}^2}{4} - \left[\frac{n-2}{2}\right] \left[\frac{n-1}{2}\right],$$

или

(VI) $$C_{bb_2}(S'') - C_{bb_1}(S' \setminus \{a\}) = -\frac{\gamma_{ab}^2}{4} + \frac{1-(-1)^n}{8}.$$

Учитывая IV, (V) и (VI), получим:

(VII) $$C(S'') - C(S' \setminus \{a\}) = -\frac{\gamma_{ab}^2}{4} + \frac{1-(-1)^n}{8}.$$

Складывая (III) и (VII) почленно, получим:

$$\text{(VIII)}\ C(S'')-C(S'\setminus\{b_1\})=\sum_{\substack{i<j\\ x_i,\,x_j|\varsigma(x_i,\,x_j,\,a)\varsigma(x_i,\,x_j,\,b)<0}}\{\gamma_{ij}\varsigma(b,\,x_i,\,x_j)\,\varsigma(a,\,b,\,x_i)\,\varsigma(a,\,b,\,x_j)+$$

$$+\varsigma(a,\,b,\,x_i)\,\varsigma(a,\,b,\,x_j)\}-\frac{\gamma_{ab}^2}{4}+\frac{1-(-1)^n}{8}.$$

Учитывая, что $S'\setminus\{b_1\}=S_n$, где S_n — наименее выпуклая система из n точек, получаем теорему:

Теорема 1. Если S_n — наименее выпуклая, то имеет место неравенство:

$$\sum_{\substack{i<j\\ x_i,\,x_j|\varsigma(x_i,\,x_j,\,a)\varsigma(x_i,\,x_j,\,b)<0}}\{\gamma_{ij}\varsigma(b,\,x_i,\,x_j)\,\varsigma(a,\,b,\,x_i)\,\varsigma(a,\,b,\,x_j)+\varsigma(a,\,b,\,x_i)\varsigma(a,\,b,\,x_j)\}\geqslant$$

$$\geqslant\frac{\gamma_{ab}^2}{4}+\frac{(-1)^n-1}{8}.$$

для всех $a,\,b\in S_n$.

Исходя из последней теоремы, получим еще один необходимый признак наименее выпуклой системы. Меняя в (VIII) местами точки a и b и учитывая, что суммирование здесь ведется по тем парам $x_i,\ x_j$, для которых

$$\varsigma(x_i,\ x_j,\ a)\,\varsigma(x_i,\,x_j,\,b)<0,$$

получим:

$$\sum_{\substack{i<j\\ x_i,\,x_j|\varsigma(x_i,\,x_j,\,a)\varsigma(x_i,\,x_j,\,b)<0}}\{-\gamma_{ij}\varsigma(b,\,x_i,\,x_j)\,\varsigma(a,\,b,\,x_i)\,\varsigma(a,\,b,\,x_j)+\varsigma(a,\,b,\,x_i)\,\varsigma(a,\,b,\,x_j)\}\geqslant$$

$$\geqslant\frac{\gamma_{ab}^2}{4}+\frac{(-1)^n-1}{8}.$$

Складывая почленно (VIII) и (IX), получим:

$$\text{(X)}\quad \sum_{\substack{i<j\\ x_i,\,x_j|\varsigma(x_i,\,x_j,\,a)\,\varsigma(x_i,\,x_j,\,b)<0}}\varsigma(a,\,b,\,x_i)\ \varsigma\ (a,\,b,\,x_j)\ \geqslant\ \frac{\gamma_{ab}^2}{4}+\frac{(-1)^n-1}{8}.$$

Теорема 2. Для наименьшей выпуклости системы необходимо выполнение неравенств (X) для всех $a,\,b\in S_n$.

Получим еще одно видоизменение последнего признака. (X) можно переписать так:

$$\frac{1}{2}\sum_{i<j}\{1-\varsigma(x_i,\,x_j,\,a)\,\varsigma(x_i,\,x_j,\,b)\}\,\varsigma(a,\,b,\,x_i)\varsigma(a,\,b,\,x_j)\geqslant$$

$$\geqslant\frac{\gamma_{ab}^2}{4}+\frac{(-1)^n-1}{8}.$$

Откуда

$$\sum_{i<j}\{\varsigma(a,\,b,\,x_i)\,\varsigma(a,\,b,\,x_j)-\varsigma(a,\,b,\,x_i)\,\varsigma(a,\,b,\,x_j)\varsigma(x_i,\,x_j,\,a)\varsigma(x_i,\,x_j,\,b)\}\geqslant$$

$$\text{(XI)}\qquad \geqslant\frac{\gamma_{ab}^2}{2}+\frac{(-1)^n-1}{4}.$$

Легко видеть, что

$$\sum_{i<j} \varsigma(a, b, x_i)\varsigma(a, b, x_j) = C^2_{\frac{n-2+\gamma}{2}} + C^2_{\frac{n-2-\gamma}{2}} -$$

$$- \frac{n-2+\gamma}{2} \cdot \frac{n-2-\gamma}{2} = \frac{\gamma^2_{ab}}{2} - \frac{n-2}{2},$$

где $\gamma = \gamma_{ab}$.

Обозначим количество выпуклых и невыпуклых четверок с участием пары точек (a, b) через $C(a, b)$ и $I(a, b)$.

Тогда:

(XII) $$-\sum_{i<j} \varsigma(a, b, x_i)\varsigma(a, b, x_j)\varsigma(x_i, x_j, a)\varsigma(x_i, x_j, b) = I(a, b) - C(a, b).$$

Учитывая (XII) и (XIII), неравенство (XI) перепишем так:

$$\frac{\gamma^2_{ab}}{2} - \frac{n-2}{2} + I(a,b) - C(a,b) \geqslant \frac{\gamma^2_{ab}}{2} + \frac{(-1)^n - 1}{4};$$

$$-\frac{n-2}{2} + I(a,b) - C(a,b) \geqslant \frac{(-1)^n - 1}{4}$$

или

(XIV) $$I(a,b) - C(a,b) \geqslant \frac{(-1)^n - 1}{4} + \frac{n-2}{2}.$$

Теорема 3. Для наименее выпуклой S_n имеет место неравенство (XIV) для всех $a, b \in S_n$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Г. Г. Пестов. О некоторых числовых характеристиках точечных систем. Известия ТПИ, т. 134, 1965.

2. Г. Г. Пестов. О числе невыпуклых и выпуклых четверок в плоской точечной системе. Настоящий сборник.