ИЗВЕСТИЯ
ТОМСКОГО ОРДЕНА ТРУДОВОГО КРАСНОГО ЗНАМЕНИ ПОЛИТЕХНИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА имени С. М. КИРОВА

Том 154 1967

ПРИМЕНЕНИЕ ПРОИЗВЕДЕНИЯ БИНОМОВ ДЛЯ ВЫЧИСЛЕНИЯ АСИМПТОТИЧЕСКОГО РЯДА КУММЕРА

В. Е. КОРНИЛОВ

(Представлена научным семинаром кафедры высшей математики)

Приближения асимптотического ряда Куммера в виде произведения биномов получены на основе теории цепных дробей и могут быть применены для вычисления указанного ряда при больших значениях аргумента по модулю.

Ряд Куммера содержит параметры α и β, которые в этой статье изучены при изменении в следующих интервалах: $-1<\beta\leqslant\alpha$, $0<\alpha<2$. Оценка остаточного члена получена для комплексного переменного z в области $|\arg z|\leqslant\frac{\pi}{2}$.

1. Если ввести сокращенное обозначение произведения

$$(a)_\kappa = a(a+1)\ldots(a+\kappa-1)=\frac{\Gamma(a+\kappa)}{\Gamma(a)},\quad (a)_0=1,$$

то асимптотический ряд функции Куммера ([1], стр. 341) следующий:

$$F\left(\alpha,\beta;\,;-\frac{1}{z}\right)=\sum_{\kappa=0}^{\infty}\frac{(\alpha)_\kappa(\beta)_\kappa}{(1)_\kappa}\left(-\frac{1}{z}\right)^\kappa,\quad |z|\gg 1,\quad |\arg z|<\pi. \tag{1}$$

Ряд (1) преобразуется таким путем:

$$F\left(\alpha,\beta;\,;-\frac{1}{z}\right)=e^{\ln F\left(\alpha,\beta;\,;-\frac{1}{z}\right)}=e^{\ln F\left(-\frac{1}{z}\right)}=$$

$$=\exp\left\{\int_{\infty}^{z}\left[F\left(-\frac{1}{z}\right)\right]^{-1}d\left[F\left(-\frac{1}{z}\right)\right]\right\},$$

то есть

$$F\left(\alpha,\beta;\,;-\frac{1}{z}\right)=\exp\left[\int_{\infty}^{z}\frac{\alpha\beta F\left(\alpha+1,\beta+1;\,;-\frac{1}{t}\right)}{F\left(\alpha,\beta;\,;-\frac{1}{t}\right)}\cdot\frac{dt}{t^2}\right]. \tag{2}$$

Далее к числителю подынтегральной функции (2) применим рекуррентное соотношение

$$\beta F\left(\alpha+1,\beta+1;\,;-\frac{1}{t}\right)=tF\left(\alpha,\beta;\,;-\frac{1}{t}\right)-tF\left(\alpha+1,\beta;\,;-\frac{1}{t}\right) \tag{3}$$

и заменим отношение двух рядов известным разложением его в цепную дробь ([2], стр. 137), тогда ряд (1) выразится числом e, имеющим показателем степени интеграл и под знаком интеграла цепную дробь, а именно:

$$F\left(\alpha, \beta; ; -\frac{1}{z}\right) = \exp\left\{\int_{\infty}^{z}\left[\frac{\alpha}{t} - \frac{\alpha P_{2n+1}(t)}{tQ_{2n+1}(t)}\right]dt\right\} \times \exp\left[\alpha\int_{\infty}^{z} R_{2n+1}(t)\frac{dt}{t}\right], \tag{4}$$

где

$$\rho_{2n+1}(z) = \alpha\int_{\infty}^{z} R_{2n+1}(t)\frac{dt}{t}; \tag{5}$$

$$\frac{P_\kappa(t)}{Q_\kappa(t)} = \cfrac{1}{\alpha_1 + \cfrac{1}{\alpha_2 + \ddots + \cfrac{1}{\alpha_\kappa}}},$$

$$\alpha_1 = 1, \quad \alpha_{2m} = \frac{(\alpha+1)_{m-1}t}{(\beta)_m}, \quad \alpha_{2m+1} = \frac{(\beta)_m}{(\alpha+1)_m}; \tag{6}$$

$$R_{2n+1}(t) = \sum_{\kappa=n+1}^{\infty}\frac{(\beta)_\kappa}{(\alpha+1)_\kappa Q_{2\kappa-1}(t)Q_{2\kappa+1}(t)} \text{ ([13], стр. 34)}. \tag{7}$$

Для числителя и знаменателя подходящей дроби (6) известны равенства и соотношение ([3], стр. 13, 14):

$$P_{2n+1}(t) = 1 + \cdots + \frac{t^n}{(\alpha+1)_n} = \frac{t^n}{(\alpha+1)_n}p_{2n+1}(t), \tag{8}$$

$$Q_{2n+1}(t) = \sum_{m=0}^{n}\alpha_{2m+1} + \cdots + \frac{n(\alpha+\beta+n)}{(\alpha+1)_n}t^{n-1} + \frac{t^n}{(\alpha+1)_n} = \frac{t^n}{(\alpha+1)_n}q_{2n+1}(t), \tag{9}$$

где

$$D_n = \sum_{m=0}^{n}\alpha_{2m+1} = \sum_{m=0}^{n}\frac{(\beta)_m}{(\alpha+1)_m}. \tag{10}$$

$$Q_{2n+1}(t) = \left(\alpha_{2n}\alpha_{2n+1} + 1 + \frac{\alpha_{2n+1}}{\alpha_{2n-1}}\right)Q_{2n-1}(t) - \frac{\alpha_{2n+1}}{\alpha_{2n-1}}Q_{2n-3}(t). \tag{11}$$

2. Корни многочлена $Q_{2n+1}(t)$ вещественные отрицательные и разделяются корнями $Q_{2n-1}(t)$ ([3], стр. 14). Ввиду равенства (9) нетрудно установить, что крайний корень $Q_{2n+1}(t)$ расположен в интервале $(-\alpha-\beta-n, \ -n\alpha-n\beta-n^2)$, поэтому относительно смежных знаменателей справедливо неравенство:

$$\left|1 + \frac{t}{n(\alpha+\beta+n)}\right|\frac{D_n}{D_{n-1}}|Q_{2n-1}(t)| < |Q_{2n+1}(t)|, \quad |\arg t| \leqslant \frac{\pi}{2}, \quad n = 1, 2, \ldots \tag{12}$$

Неравенство (12) имеет место и для $-1 < \beta < 0$, так как $Q_{2n+1}(t)$ содержит параметры α и β в симметричном виде и при перестановке интервалов изменения этих параметров все неполные частные цепной дроби (6) положительны.

Академик В. И. Смирнов доказал формулу для гипергеометрического ряда ([4], стр. 374):

$$F(\alpha, \beta; \gamma; 1) = \frac{\Gamma(\gamma)\Gamma(\gamma-\alpha-\beta)}{\Gamma(\gamma-\alpha)\Gamma(\gamma-\beta)}. \tag{13}$$

Согласно равенства (10)

$$D_n = F(1, \beta; \alpha+1; 1) - F(1, \beta+n+1; \alpha+n+2; 1)\cdot\frac{(\beta)_{n+1}}{(\alpha+1)_{n+1}} \tag{14}$$

и ввиду формулы (13) получим:

$$D_n = \sum_{m=0}^{n}\frac{(\beta)_m}{(\alpha+1)_m} = \frac{(\alpha)_{n+1}-(\beta)_{n+1}}{(\alpha+1)_n(\alpha-\beta)};\ \alpha\neq\beta. \tag{15}$$

Применяя формулы (13), (15) и неравенство (12) к бесконечному функциональному ряду (7) с учетом того, что

$$\frac{\alpha}{\alpha-\beta} < D_n < 1,\ \ n = 1, 2, \ldots;\ -1<\beta<0.\ D_n < D_{n+1} \text{ для } \beta>0;$$

$$D_n > \frac{1}{2}[C+\ln(n+1)] + \ln 2 > \frac{1}{2}\ln 7(n+1) \quad ([5], \text{ стр. } 244),$$

$$\beta = \alpha \geqslant \frac{1}{2}, \tag{16}$$

получим

$$|R_{2n+1}(t)| < S_n\frac{|(\beta)_{n+1}|D_{n-1}D_n^{-1}}{(\alpha+1)_{n+1}|Q_{2n+1}(t)||Q_{2n+3}(t)|},\ |\arg t| \leqslant \frac{\pi}{2}, \tag{17}$$

где

$$S_n = \begin{cases} D_n^2\dfrac{(\alpha+n+1)(\alpha-\beta)}{\alpha^2} & \text{для } -1<\beta<0; \\[2mm] \dfrac{D_n(\alpha+n+1)}{D_{n+1}(\alpha-\beta)} & \text{для } 0<\beta<\alpha; \\[2mm] \dfrac{4D_n^2[1+(\alpha+n+1)\ln 7(n+2)]}{\ln 7(n+1)\ln 7(n+2)} & \text{для } \beta=\alpha\geqslant\dfrac{1}{2}. \end{cases} \tag{18}$$

Далее при помощи неравенств (12) и (17) получим оценку модуля интеграла (5), где интегрирование совершается вдоль радиуса точки z ([6], стр. 430), а именно:

$$|\rho_{2n+1}(z)| < \frac{\alpha S_n|(\beta)_{n+1}|(n+1)(\alpha+\beta+n+1)}{(\alpha+1)_{n+1}}\int_{\infty}^{z}\frac{|dt|}{|Q_{2n+1}(t)|^2|t|^2} <$$

$$< \frac{\alpha S_n|(\beta)_{n+1}|(n+1)(\alpha+\beta+n+1)}{(\alpha+1)_{n+1}|Q_{2n+1}(z)|^2}\int_{\infty}^{|z|}\frac{d|t|}{|t|^2} =$$

$$= \frac{\alpha S_n|(\beta)_{n+1}|(n+1)(\alpha+\beta+n+1)}{(\alpha+1)_{n+1}|Q_{2n+1}(z)|^2|z|}.$$

Последнее неравенство справедливо потому, что для $|\arg t| \leqslant \frac{\pi}{2}$ многочлены знаменателей подынтегральных выражений могут быть представлены произведением двучленов вида $\left(1+\frac{t}{a_m}\right)$, $a_m > 0$ и модуль каждого из них принимает минимальное значение при верхнем пределе интеграла. Таким образом получена оценка интеграла (5) по модулю:

$$|\rho_{2n+1}(z)| < \frac{\alpha S_n |(\beta)_{n+1}| (n+1)(\alpha+\beta+n+1)}{(\alpha+1)_{n+1} |Q_{2n+1}(z)|^2 |z|}, \quad |\arg z| \leqslant \frac{\pi}{2}, \tag{19}$$

где S_n принимает значения согласно равенства (18).

3. При $n = 1$ получаем оценку функции (4):

$$\left|F\left(\alpha, \beta; ; -\frac{1}{z}\right)\right| \leqslant \left|1 + \frac{\alpha+\beta+1}{z}\right|^{-\frac{\alpha\beta}{\alpha+\beta+1}} \exp|\rho_3(z)|. \tag{20}$$

Равенство (4) с учетом (8) и (9) можно записать в виде следующей суммы:

$$F\left(\alpha, \beta; ; -\frac{1}{z}\right) = \exp\left\{\int\limits_{\infty}^{z} \left[\frac{\alpha}{t} - \frac{\alpha p_{2n+1}(t)}{t q_{2n+1}(t)}\right] dt\right\} +$$

$$+ r_{2n+1}(z) = F_{2n+1}(z) + r_{2n+1}(z), \tag{21}$$

где

$$r_{2n+1}(z) = F_{2n+1}(z)\{\exp[\rho_{2n+1}(z)] - 1\}. \tag{22}$$

Ввиду (20) и (22) получим

$$|r_{2n+1}(z)| < \left|1 + \frac{\alpha+\beta+1}{z}\right|^{-\frac{\alpha\beta}{\alpha+\beta+1}} \exp|\rho_3(z)| [\exp|\rho_{2n+1}(z)| - 1]. \tag{23}$$

Теорема. Ряд (1) представляется следующим произведением биномов ($n = 1, 2, \dots$):

$$F\left(\alpha, \beta; ; -\frac{1}{z}\right) = \prod_{m=1}^{n} \left(1 + \frac{a_m}{z}\right)^{b_m} + r_{2n+1}(z), \tag{24}$$

где

$$\prod_{m=1}^{n} \left(1 + \frac{a_m}{z}\right) = q_{2n+1}(z), \quad b_m = \frac{\alpha\beta A_{2n+1}(-a_m)}{a_m^2 \frac{d}{dz}[q_{2n+1}(-a_m)]}. \tag{25}$$

Многочлены $A_{2n+1}(z)$ и $q_{2n+1}(z)$ следующие:

$$A_1(z) = 0, \quad A_3(z) = q_1(z) = 1; \quad q_3(z) = 1 + \frac{\alpha+\beta+1}{z}, \tag{26}$$

они для $n = 2, 3, \dots$ определяются последовательно с помощью соотношения:

$$q_{2n+1}(z) = \left[1 + (\alpha+\beta+2n-1)\frac{1}{z}\right] q_{2n-1}(z) -$$

$$- (\alpha+n-1)(\beta+n-1)\frac{1}{z^2} q_{2n-3}(z). \tag{27}$$

Верхняя граница $|r_{2n+1}(z)|$ в области $|\arg z| \leqslant \frac{\pi}{2}$ устанавливается при помощи неравенств (23), (19).

Доказательство. Прежде всего вводим соотношение

$$\beta A_{2n+1}(z) = z\left[q_{2n+1}(z) - p_{2n+1}(z)\right]; \quad n = 1, 2, \ldots \tag{28}$$

и ввиду равенств (8), (9), (11) и (28) многочлены $q_{2n+1}(z)$, $p_{2n+1}(z)$ и $A_{2n+1}(z)$ удовлетворяют соотношению (27).

Применяя равенство (28), преобразуем равенство (21):

$$F\left(\alpha, \beta; ; -\frac{1}{z}\right) = \exp\left[-\int\limits_{\infty}^{z} \frac{\alpha\beta\, A_{2n+1}(t)}{q_{2n+1}(t)}\, d\left(\frac{1}{t}\right)\right] + r_{2n+1}(z) =$$

$$= \exp\left[\sum_{m=1}^{n} a_m b_m \int\limits_{\infty}^{z} \frac{1}{\left(1 + \frac{a_m}{t}\right)}\, d\left(\frac{1}{t}\right)\right] + r_{2n+1}(z) =$$

$$= \prod_{m=1}^{n}\left(1 + \frac{a_m}{z}\right)^{b_m} + r_{2n+1}(z),$$

где

$$b_m = \frac{\alpha\beta A_{2n+1}(-a_m)}{a_m^2 \frac{d}{dz}\left[q_{2n+1}(-a_m)\right]},$$

к тому же на основании (24) и (21) $|r_{2n+1}(z)|$ оценивается неравенствами (23), (19).

ЛИТЕРАТУРА

1. Н. Н. Лебедев. Специальные функции и их приложения. М., Гостехиздат, 1953.
2. А. Н. Хованский. Приложение цепных дробей и их обобщений к вопросам приближенного анализа. М., ГИТТЛ, 1956.
3. Т. И. Стилтьес. Исследования о непрерывных дробях. М., ОНТИ, 1936.
4. В. И. Смирнов. Курс высшей математики. том 3, часть вторая, М., ГИТТЛ, 1953.
5. И. М. Рыжик. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М.—Л., ГИТТЛ, 1948.
6. И. И. Привалов. Введение в теорию функций комплексного переменного. М.—Л., Гостехиздат, 1948.