

ПРЕОБРАЗОВАНИЕ В ЦЕПНЫЕ ДРОБИ НЕКОТОРЫХ СТЕПЕННЫХ РЯДОВ

В. Е. КОРНИЛОВ

(Представлена научным семинаром кафедры высшей математики)

В статье получены рекуррентные соотношения для следующих рядов:

1) сумма ряда Гаусса $F(\alpha, \beta; \gamma; z)$ с элементом $\beta = n, \gamma = n$ преобразуется к ряду $F(\alpha + n - 1, 1; \gamma; z)$;

2) сумма ряда Куммера $\Phi(\alpha; \gamma; z)$ в случае $\alpha = n, \gamma = n$ преобразуется к сумме ряда $\Phi(1; \gamma; z)$;

3) асимптотический ряд функции Куммера

$$F\left(\alpha, \beta;; \frac{1}{z}\right) = \sum_{\kappa=0}^{\infty} \frac{(\alpha)_{\kappa} (\beta)_{\kappa}}{(1)_{\kappa} z^{\kappa}}, \quad |z| \gg 1, \quad \operatorname{Re}(z) < 0 \quad (1)$$

в случае $\beta = n$ преобразуется к сумме ряда $F\left(\alpha + n - 1, 1;; \frac{1}{z}\right)$.

Полученные после преобразований степенные ряды разлагаются в цепные дроби, которые можно найти в [1] и [2]. А исходные ряды представляются суммой двух многочленов, причем одна из этих сумм умножается на сумму бесконечного ряда, разлагающегося в цепную дробь.

В статье введена сокращенная запись произведения

$$(a)_{\kappa} = a(a+1)\dots(a+\kappa-1) = \frac{\Gamma(a+\kappa)}{\Gamma(a)}, \quad (a)_0 = 1.$$

1. Степенной ряд

$$F(\alpha, 1; \gamma; z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\alpha)_n}{(\gamma)_n} z^n, \quad |z| < 1, \quad \gamma \neq 0, -1, \dots, \quad (2)$$

который получается путем разложения в ряд определенного интеграла с переменным верхним пределом ([3], стр. 308):

$$F(\alpha, 1; \gamma; z) = \frac{(\gamma-1)z^{1-\gamma}}{(1-z)^{\alpha+1-\gamma}} \int_0^z z^{\gamma-2} (1-z)^{\alpha-\gamma} dz, \quad \gamma > 1, \quad (3)$$

может быть разложен в цепную дробь ([1], стр. 320)

$$F(\alpha, 1; \gamma; z) = \frac{1}{1 - \frac{\alpha z}{\gamma - \frac{\kappa(\gamma - \alpha + \kappa - 1)z}{\gamma + 2\kappa - 1 - \frac{(\gamma + \kappa - 1)(\alpha + \kappa)z}{\gamma + 2\kappa - 1}}}} \quad (4)$$

и удовлетворяет соотношению

$$F(\alpha, 1; \gamma; z) = -(\gamma - 1) \sum_{n=0}^{\kappa-1} \frac{(\alpha)_n}{(\alpha - \gamma + 1)_{n+1}} (1 - z)^n + \frac{(\alpha)_\kappa}{(\alpha - \gamma + 1)_\kappa} (1 - z)^\kappa F(\alpha + \kappa, 1; \gamma; z). \quad (5)$$

Сумма ряда (2) удовлетворяет соотношению

$$F(\alpha, 1; \gamma; z) = -\frac{\gamma - 1}{\alpha - \gamma + 1} + \frac{\alpha}{\alpha - \gamma + 1} (1 - z) F(\alpha + 1, 1; \gamma; z), \quad (6)$$

так как коэффициент при z^κ в правой части равенства

$$\begin{aligned} & \frac{\alpha}{\alpha - \gamma + 1} \left[\frac{(\alpha + 1)_\kappa}{(\gamma)_\kappa} - \frac{(\alpha + 1)_{\kappa-1}}{(\gamma)_{\kappa-1}} \right] = \\ & = \frac{\alpha(\alpha + 1)_{\kappa-1} [\alpha + \kappa - (\gamma + \kappa - 1)]}{(\alpha - \gamma + 1)(\gamma)_\kappa} \equiv \frac{(\alpha)_\kappa}{(\gamma)_\kappa}. \end{aligned}$$

Равенство (5) при $\kappa = 1$ совпадает с соотношением (6). Предположим, что справедлива формула (5), тогда, заменяя $F(\alpha + \kappa, 1; \gamma; z)$ по формуле (6), получим:

$$\begin{aligned} F(\alpha, 1; \gamma; z) &= -(\gamma - 1) \sum_{n=0}^{\kappa-1} \frac{(\alpha)_n}{(\alpha - \gamma + 1)_{n+1}} (1 - z)^n + \\ &+ \frac{(\alpha)_\kappa}{(\alpha - \gamma + 1)_\kappa} (1 - z)^\kappa \left[-\frac{\gamma - 1}{\alpha - \gamma + \kappa + 1} + \right. \\ &+ \left. \frac{\alpha + \kappa}{\alpha - \gamma + \kappa + 1} (1 - z) F(\alpha + \kappa + 1, 1; \gamma; z) \right] = \\ &= -(\gamma - 1) \sum_{n=0}^{\kappa} \frac{(\alpha)_n}{(\alpha - \gamma + 1)_{n+1}} (1 - z)^n + \\ &+ \frac{(\alpha)_{\kappa+1}}{(\alpha - \gamma + 1)_{\kappa+1}} (1 - z)^{\kappa+1} F(\alpha + \kappa + 1, 1; \gamma; z), \end{aligned}$$

чем подтверждается соотношение (5).

Аналогично можно рассмотреть свойства сумм рядов

$$\Phi(1; \gamma; z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{(\gamma)_n}, \quad \gamma \neq 0, -1, \dots, \quad (7)$$

$$F\left(\alpha, 1; \frac{1}{z}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\alpha)_n}{z^n}, \quad |z| \gg 1, \quad \operatorname{Re}(z) < 0, \quad (8)$$

которые можно преобразовать соответственно к неполной гамма-функции и функции Прима ([4], стр. 110), разложения которых в цепные дроби известны ([2], стр. 301), а именно:

$$\Phi(1; \gamma; z) = \frac{1}{1 - \frac{z}{\gamma - \frac{\kappa z}{\gamma + 2\kappa - 1 - \frac{(\gamma + \kappa - 1)z}{\gamma + 2\kappa - \dots}}}} \quad (9)$$

$$F\left(\alpha, 1; \frac{1}{z}\right) = \frac{1}{1 + \frac{\alpha}{-z + \frac{\kappa}{1 + \frac{\alpha + \kappa}{-z + \dots}}}} \quad (10)$$

Сумма степенного ряда (7) удовлетворяет соотношению:

$$\Phi(1; \gamma; z) = \sum_{n=0}^{\kappa-1} \frac{z^n}{(\gamma)_n} + \frac{z^\kappa}{(\gamma)_\kappa} \Phi(1; \gamma + \kappa; z). \quad (11)$$

Сумма асимптотического ряда (8) удовлетворяет соотношению:

$$F\left(\alpha, 1; \frac{1}{z}\right) = \sum_{n=0}^{\kappa-1} \frac{(\alpha)_n}{z^n} + \frac{(\alpha)_\kappa}{z^\kappa} F\left(\alpha + \kappa, 1; \frac{1}{z}\right). \quad (12)$$

Равенства (11), (12) легко проверяются путем подстановки рядов (7), (8) и сравнения коэффициентов при одинаковых степенях z в левой и правой частях рассматриваемых равенств.

2. Если к следующей функции ([3], стр. 308):

$$F(\alpha, n; \gamma; z) = \sum_{\kappa=1}^n (-1)^{\kappa+1} C_{n-1}^{\kappa-1} \frac{(\alpha + 1 - \kappa)_{n-1}}{(1)_{n-1}} F(\alpha + n - \kappa, 1; \gamma; z), \quad (13)$$

стоящей в правой части равенства, применить равенство (5), то получится

$$F(\alpha, n; \gamma; z) = \sum_{\kappa=1}^n (-1)^{\kappa+1} C_{n-1}^{\kappa-1} \frac{(\alpha + 1 - \kappa)_{n-1}}{(1)_{n-1}} \left[-(\gamma - 1) \sum_{m=0}^{\kappa-2} \frac{(\alpha + n - \kappa)_m}{(\alpha - \gamma + n - \kappa + 1)_{m+1}} (1-z)^{m+1} + \frac{(\alpha + n - \kappa)_{\kappa-1}}{(\alpha - \gamma + n - \kappa + 1)_{\kappa-1}} (1-z)^{\kappa-1} F(\alpha + n - 1, 1; \gamma; z) \right].$$

После раскрытия скобок получим:

$$F(\alpha, n; \gamma; z) = \frac{\gamma - 1}{(1)_{n-1}} \sum_{\kappa=2}^n (-1)^\kappa C_{n-1}^{\kappa-1} \sum_{m=0}^{\kappa-2} \frac{(\alpha + 1 - \kappa)_{n+m-1}}{(\alpha - \gamma + n - \kappa + 1)_{m+1}} (1-z)^m + \frac{(\alpha)_{n-1}}{(1)_{n-1}} \sum_{\kappa=1}^n \frac{(1-n)_{\kappa-1} (1-\alpha)_{\kappa-1}}{(1)_{\kappa-1} (1+\gamma-\alpha-n)_{\kappa-1}} (1-z)^{\kappa-1} F(\alpha + n - 1, 1; \gamma; z). \quad (14)$$

Ряд $F(\alpha + n - 1, 1; \gamma; z)$ теперь может быть представлен цепной дробью (4). Гипергеометрический ряд $F(\alpha, \gamma - n; \gamma; z)$ ввиду известного соотношения ([5], стр. 319)

$$F(\alpha, \gamma - n; \gamma; z) = (1 - z)^{n-\alpha} F(\gamma - \alpha, n; \gamma; z) \quad (15)$$

и формулы (14) также может быть выражен посредством цепной дроби (4).

3. После последовательного применения известного рекуррентного соотношения ([5], стр. 334)

$$\Phi(n; \gamma; z) = \frac{\gamma - 1}{n - 1} \Phi(n - 1; \gamma - 1; z) - \frac{\gamma - n}{n - 1} \Phi(n - 1; \gamma; z) \quad (16)$$

получается

$$\begin{aligned} \Phi(n; \gamma; z) = \\ = \sum_{\kappa=0}^{n-1} (-1)^\kappa C_{n-1}^\kappa \frac{(\gamma - n)_n}{(1)_{n-1} (\gamma - n + \kappa)} \Phi(1; \gamma - n + 1 + \kappa; z). \end{aligned} \quad (17)$$

К функции, расположенной в правой части равенства (17), применяется равенство (11):

$$\begin{aligned} \Phi(n; \gamma; z) = \frac{(\gamma - n)_n}{(1)_{n-1}} \sum_{\kappa=0}^{n-1} C_{n-1}^\kappa \frac{(-1)^\kappa}{\gamma - n + \kappa} \left[\sum_{m=0}^{n-\kappa-2} \frac{z^m}{(\gamma - n + 1 + \kappa)_m} + \right. \\ \left. + \frac{z^{n-\kappa-1}}{(\gamma - n + 1 + \kappa)_{n-\kappa-1}} \Phi(1; \gamma; z) \right]. \end{aligned}$$

Раскрывая скобки, окончательно получим

$$\begin{aligned} \Phi(n; \gamma; z) = \frac{(\gamma - n)_n}{(1)_{n-1}} \sum_{\kappa=0}^{n-2} C_{n-1}^\kappa (-1)^\kappa \sum_{m=0}^{n-\kappa-2} \frac{z^m}{(\gamma - n + \kappa)_{m+1}} + \\ + \frac{1}{(1)_{n-1}} \sum_{\kappa=0}^{n-1} C_{n-1}^\kappa (-1)^\kappa (\gamma - n)_\kappa z^{n-\kappa-1} \Phi(1; \gamma; z), \end{aligned} \quad (18)$$

где $\Phi(1; \gamma; z)$ разлагается в цепную дробь (9).

Ряд $\Phi(\gamma - n; \gamma; -z)$ ввиду известного соотношения ([5], стр. 334)

$$\Phi(\gamma - n; \gamma; -z) = e^{-z} \Phi(n; \gamma; z) \quad (19)$$

также представляется цепной дробью (9).

4. Сумма асимптотического ряда $F\left(\alpha, n; \frac{1}{z}\right)$ удовлетворяет рекуррентному соотношению

$$\begin{aligned} (n - 1) F\left(\alpha, n; \frac{1}{z}\right) = \alpha F\left(\alpha + 1, n - 1; \frac{1}{z}\right) - \\ - (\alpha - n + 1) F\left(\alpha, n - 1; \frac{1}{z}\right), \end{aligned} \quad (20)$$

так как коэффициент при $z^{-\kappa}$ в правой части равенства

$$\frac{(\alpha)_{\kappa+1} (n - 1)_\kappa}{(1)_\kappa} - \frac{(\alpha - n + 1) (\alpha)_\kappa (n - 1)_\kappa}{(1)_\kappa} = \frac{(\alpha)_\kappa (n - 1)_{\kappa+1}}{(1)_\kappa},$$

что и доказывает справедливость этой формулы.

После последовательного применения соотношения (20) получим

$$F\left(\alpha, n;; \frac{1}{z}\right) = \sum_{\kappa=0}^{n-1} (-1)^\kappa C_{n-1}^\kappa \frac{(\alpha - \kappa)_{n-1}}{(1)_{n-1}} F\left(\alpha + n - \kappa - 1; 1;; \frac{1}{z}\right). \quad (21)$$

Применяя равенство (12), имеем

$$F\left(\alpha, n;; \frac{1}{z}\right) = \sum_{\kappa=0}^{n-1} (-1)^\kappa C_{n-1}^\kappa \frac{(\alpha - \kappa)_{n-1}}{(1)_{n-1}} \left[\sum_{m=0}^{\kappa-1} \frac{(\alpha + n - \kappa - 1)_m}{z^m} + \right. \\ \left. + \frac{(\alpha + n - \kappa - 1)_\kappa}{z^\kappa} F\left(\alpha + n - 1, 1;; \frac{1}{z}\right) \right].$$

После раскрытия скобок получается:

$$F\left(\alpha, n;; \frac{1}{z}\right) = \frac{1}{(1)_{n-1}} \sum_{\kappa=1}^{n-1} C_{n-1}^\kappa (-1)^\kappa \sum_{m=0}^{\kappa-1} \frac{(\alpha - \kappa)_{n+m-1}}{z^m} + \\ + \frac{(\alpha)_{n-1}}{(1)_{n-1}} \sum_{\kappa=0}^{n-1} C_{n-1}^\kappa \frac{(1 - \alpha)_\kappa}{z^\kappa} F\left(\alpha + n - 1, 1;; \frac{1}{z}\right), \quad (22)$$

где асимптотический ряд $F\left(\alpha + n - 1; 1;; \frac{1}{z}\right)$ может быть представлен цепной дробью (10).

ЛИТЕРАТУРА

1. А. А. Марков. Избранные труды по теории непрерывных дробей и теории функций наименее уклоняющихся от нуля, М.-Л., Гостехиздат, 1948.
2. В. Л. Данилов, А. Н. Иванова и др. Математический анализ (функции, пределы, ряды, цепные дроби), М., Физматгиз, 1961.
3. И. М. Рыжик. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений, М.-Л., Гостехиздат, 1948.
4. Е. Янке и Ф. Эмде. Таблицы функций, М., Физматгиз, 1959.
5. Н. Н. Лебедев. Специальные функции и их приложения, М., Гостехиздат, 1953.