ИЗВЕСТИЯ
ТОМСКОГО ОРДЕНА ТРУДОВОГО КРАСНОГО ЗНАМЕНИ ПОЛИТЕХНИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА имени С. М. КИРОВА

Том 154 1967

СИСТЕМА АППРОКСИМАЦИЙ ПАДЭ ДЛЯ СТЕПЕННЫХ ФУНКЦИЙ

В. Е. КОРНИЛОВ

(Представлена научным семинаром кафедры высшей математики)

В статье доказывается система аппроксимаций Падэ ([1], стр. 20, 38—40) для функций $y=(1+x)^{\alpha}$ и $y=x^{\alpha}$.

В статье применяется сокращенная запись

$$(a)_{\kappa}=a(a+1)\ldots(a+\kappa-1)=\frac{\Gamma(a+\kappa)}{\Gamma(a)},\ (a)_0=1.$$

1. Система рациональных приближений (аппроксимаций Падэ) для функции $y=(1+x)^{\alpha}$ может быть представлена следующей формулой:

$$y=(1+x)^{\alpha}\approx\frac{\sum\limits_{m=0}^{n-\kappa}C_{n-\kappa}^{m}\frac{(-\alpha-\kappa)_m}{(-n)_m}x^m}{\sum\limits_{m=0}^{\kappa}C_{\kappa}^{m}\frac{(\alpha-n+\kappa)_m}{(-n)_m}x^m}=\frac{P_{n-\kappa}(x)}{Q_{\kappa}(x)},\tag{1}$$

где $n=0,\ 1,\ldots;\quad \kappa=0,\ 1,\ldots,n$.

Доказательство. Предположим, что система рациональных приближений (1) является системой аппроксимаций Падэ, тогда как известно ([1], стр. 20): разложение в степенной ряд по x дроби (1) должно отличаться от ряда

$$(1+x)^{\alpha}=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-\alpha)_m}{(1)_m}(-x)^m\tag{2}$$

лишь членами при x в степенях, больших n.

Поэтому, упрощая разность рядов (1) и (2), получим:

$$(1+x)^{\alpha}-\frac{P_{n-\kappa}(x)}{Q_{\kappa}(x)}\equiv\sum_{m=n+1}^{\infty}C_m x^m,$$

$$(1+x)^{\alpha}Q_{\kappa}(x)-P_{n-\kappa}(x)\equiv\sum_{m=n+1}^{\infty}d_m x^m$$

или

$$\left[\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-\alpha)_m}{(1)_m}(-x)^m\right]\left[\sum_{m=0}^{\kappa}C_\kappa^m\frac{(\alpha-n+\kappa)_m}{(-n)_m}x^m\right]-$$
$$-\sum_{m=0}^{n-\kappa}C_{n-\kappa}^m\frac{(-\alpha-\kappa)_m}{(-n)_m}x^m\equiv\sum_{m=n+1}^{\infty}d_m x^m, \tag{3}$$

где $d_{n+1}\neq 0$.

Если учитывать только показатели степени аргумента x, не превышающие n, то в этом случае тождественно равна нулю сумма коэффициентов при произвольном показателе степени x, равном $l(l=0,1,\dots,n)$, а именно:

$$\sum_{m=0}^{l}C_\kappa^m\frac{(\alpha-n+\kappa)_m(-\alpha)_{l-m}}{(-n)_m(1)_{l-m}}(-1)^{l-m}\equiv C_{n-\kappa}^l\frac{(-\alpha-\kappa)_l}{(-n)_l}, \tag{4}$$

где $l=0,1,\dots,n$.

Тождество (4) после некоторых преобразований приводится к следующему виду:

$$\sum_{m=0}^{l}\frac{(-l)_m(-n+m)_{l-m}(-\kappa)_m(\alpha-n+\kappa)_m}{(1)_m(\alpha-l+1)_m}\equiv\frac{(-n+\kappa)_l(-\alpha-\kappa)_l}{(-\alpha)_l}. \tag{5}$$

Непосредственным вычислением убеждаемся, что тождество (5) справедливо при $l=0,1$. Предположим, что справедливо тождество (5), тогда умножая обе части равенства на $\dfrac{(-n+\kappa+l)(\alpha+\kappa-l)}{\alpha-l}$, мы должны получить аналогичное тождество, которое содержит одним слагаемым больше для суммы левой части равенства. Таким путем мы получим следующее тождество:

$$\sum_{m=0}^{l}\frac{(-l)_m(-n+m)_{l-m}(-\kappa)_m(\alpha-n+\kappa)_m}{(1)_m(\alpha-l+1)_m(\alpha-l)}(-n+\kappa+l)(\alpha+\kappa-l)-$$
$$-\sum_{m=0}^{l+1}\frac{(-l-1)_m(-n+m)_{l+1-m}(-\kappa)_m(\alpha-n+\kappa)_m}{(1)_m(\alpha-l)_m}\equiv 0,$$

которое преобразуется под один знак суммы

$$\sum_{m=1}^{l+1}\frac{(-l)_{m-1}(-n+m)_{l-m}(-\kappa)_{m-1}(\alpha-n+\kappa)_{m-1}}{(1)_m(\alpha-l)_m}\{m(-n+m-1)\times$$
$$\times(-n+\kappa+l)(\alpha+\kappa-l)+(l+1)(-n+l)(-\kappa+m+1)\times$$
$$\times(\alpha-n+\kappa+m-1)\}-(-n)_{l+1}\equiv 0.$$

Далее выражение в фигурных скобках заменим тождественной следующей суммой:

$$m(-n+m-1)(-n+\kappa+l)(\alpha+\kappa-l)+(l+1)(-n+l)\times$$
$$\times(-\kappa+m-1)(\alpha-n+\kappa+m-1)\equiv m(-n+m-1)\times$$
$$\times(-n+l+m-1)(\alpha-l+m-1)-(-\kappa+m-1)\times \tag{6}$$
$$\times(\alpha-n+\kappa+m-1)(-l+m-1)(-n+l+m),$$

затем выделим после нижеследующего знака равенства первое слагаемое первой суммы и увеличим индекс m на единицу:

$$\sum_{m=1}^{l+1} \frac{(-l)_{m-1}(-n+m-1)_{l+1-m}(-\kappa)_{m-1}(\alpha-n+\kappa)_{m-1}(-n+l+m-1)}{(1)_{m-1}(\alpha-l)_{m-1}} -$$

$$-(-n)_{l+1} - \sum_{m=1}^{l+1} \frac{(-l)_m(-n+m)_{l-m}(-\kappa)_m(\alpha-n+\kappa)_m(-n+l+m)}{(1)_m(\alpha-l)_m} =$$

$$= \sum_{m=1}^{l} \frac{(-l)_m(-n+m)_{l-m}(-\kappa_m)(\alpha-n+\kappa)_m(-n+l+m)}{(1)_m(\alpha-l)_m} - (-n)_{l+1} +$$

$$+(-n)_{l+1} - \sum_{m=1}^{l} \frac{(-l)_m(-n+m)_{l-m}(-\kappa)_m(\alpha-n+\kappa)_m(-n+l+m)}{(1)_m(\alpha-l)_m} \equiv 0.$$

Таким образом, тождество (5) доказано, и тем самым подтверждается, что система рациональных приближений (1) является системой аппроксимаций Падэ функции $(1+x)^\alpha$.

2. Знаменатель системы рациональных приближений (1) тождественно преобразуется к следующей функции:

$$\sum_{m=0}^{\kappa}(-1)^m \frac{(-\kappa)_m(\alpha-n+\kappa)_m}{(1)_m(-n)_m} x^m \equiv$$
$$\equiv (-1)^\kappa \frac{(\alpha+1)_\kappa}{(-n)_\kappa} \sum_{m=0}^{\kappa} \frac{(-\kappa)_m(\alpha-n+\kappa)_m}{(1)_m(\alpha+1)_m}(1+x)^m. \tag{7}$$

Тождество (7) справедливо, если тождественно равны коэффициенты при одинаковых показателях степени x, а именно:

$$(-1)^m \frac{(-\kappa)_m(\alpha-n+\kappa)_m}{(1)_m(-n)_m} \equiv$$
$$\equiv (-1)^\kappa \frac{(\alpha+1)_\kappa}{(-n)_\kappa} \sum_{l=m}^{\kappa} \frac{(m+1)_{l-m}(-\kappa)_l(\alpha-n+\kappa)_l}{(1)_{l-m}(1)_l(\alpha+1)_l}. \tag{8}$$

После некоторых упрощений получим:

$$\sum_{l=0}^{\kappa-m} \frac{(-\kappa+m)_l(\alpha-n+\kappa+m)_l}{(1)_l(\alpha+m+1)_l} \equiv \frac{(n-\kappa+1)_{\kappa-m}}{(\alpha+m+1)_{\kappa-m}}. \tag{9}$$

Непосредственным вычислением убеждаемся, что тождество (9) справедливо при $\kappa-m=0,1$. Предположим, что имеет место тождество (9), тогда, умножая обе части равенства на $\dfrac{n-m+1}{\alpha+\kappa+1}$, мы должны получить (для подтверждения нашего предположения) аналогичное тождество, имеющее в левой части равенства одним слагаемым больше, чем в равенстве (9), а это равносильно доказательству тождества:

$$\sum_{l=0}^{\kappa-m} \frac{(-\kappa+m)_l(\alpha-n+\kappa+m)_l(n-m+1)}{(1)_l(\alpha+m+1)_l(\alpha+\kappa+1)} -$$
$$- \sum_{l=0}^{\kappa-m+1} \frac{(-\kappa+m-1)_l(\alpha-n+\kappa+m)_l}{(1)_l(\alpha+m+1)_l} \equiv 0$$

или

$$\sum_{l=0}^{\kappa-m} \frac{(-\kappa+m)_l\ (\alpha-n+\kappa+m)_l}{(1)_l\ (\alpha+m+1)_l} \left[\frac{n-m+1}{\alpha+\kappa+1} - \frac{\kappa-m+1}{\kappa-m-l+1}\right] -$$

$$-(-1)^{\kappa-m+1} \frac{(\alpha-n+\kappa+m)_{\kappa-m+1}}{(\alpha+m+1)_{\kappa-m+1}} \equiv 0.$$

Заменим выражение в квадратных скобках тождественным значением:

$$\frac{n-m+1}{\alpha+\kappa+1} - \frac{\kappa-m+1}{\kappa-m-l+1} \equiv$$

$$\equiv \frac{-(\kappa-m-l+1)\ (\alpha-n+\kappa+m+l) - l(\alpha+m+l)}{(\alpha+\kappa+1)\ (\kappa-m-l+1)}, \qquad (10)$$

далее выделяем после знака равенства последнее слагаемое первой суммы и уменьшим индекс l на единицу.

Таким образом имеем:

$$-\sum_{l=0}^{\kappa-m} \frac{(-\kappa+m)_l\ (\alpha-n+\kappa+m)_{l+1}}{(1)_l\ (\alpha+m+1)_l\ (\alpha+\kappa+1)} +$$

$$+\sum_{l=1}^{\kappa-m} \frac{(-\kappa+m)_{l-1}(\alpha-n+\kappa+m)_l}{(1)_{l-1}(\alpha+m+1)_{l-1}(\alpha+\kappa+1)} + (-1)^{\kappa-m} \frac{(\alpha-n+\kappa+m)_{\kappa-m+1}}{(\alpha+m+1)_{\kappa-m+1}} =$$

$$= -\sum_{l=1}^{\kappa-m} \frac{(-\kappa+m)_{l-1}\ (\alpha-n+\kappa+m)_l}{(1)_{l-1}\ (\alpha+m+1)_{l-1}\ (\alpha+\kappa+1)} +$$

$$+\sum_{l=1}^{\kappa-m} \frac{(-\kappa+m)_{l-1}\ (\alpha-n+\kappa+m)_l}{(1)_{l-1}(\alpha+m+1)_{l-1}\ (\alpha+\kappa+1)} = 0.$$

Тождество (9) и тем самым тождество (7) доказаны.

Аналогично доказывается тождество:

$$\sum_{m=0}^{n-\kappa} C_{n-\kappa}^m \frac{(-\alpha-\kappa)_m}{(-n)_m} x^m =$$

$$= (-1)^{n-\kappa} \frac{(1-\alpha)_{n-\kappa}}{(-n)_{n-\kappa}} \sum_{m=0}^{n-\kappa} \frac{(\kappa-n)_m\ (-\alpha-\kappa)_m}{(1)_m\ (1-\alpha)_m} (1+x)^m. \qquad (11)$$

Производя замену переменной в равенствах (1), (7) и (11), а именно $1+x$ заменим через переменную x, таким образом получим:

$$y = x^\alpha \approx \frac{\dfrac{(1-\alpha)_{n-\kappa}}{(1)_{n-\kappa}} \displaystyle\sum_{m=0}^{n-\kappa} \frac{(-n+\kappa)_m\ (-\alpha-\kappa)_m}{(1)_m\ (1-\alpha)_m}\ x^m}{\dfrac{(\alpha+1)_\kappa}{(1)_\kappa} \displaystyle\sum_{m=0}^{\kappa} \frac{(-\kappa)_m\ (\alpha-n+\kappa)_m}{(1)_m\ (\alpha+1)_m}\ x^m}. \qquad (12)$$

Система рациональных приближений (12) также является системой аппроксимаций Падэ для функции $y = x^\alpha$, ввиду тождественных преобразований $Q_\kappa(x)$ и $P_{n-\kappa}(x)$ равенства (1).

ЛИТЕРАТУРА

Л. А. Люстерник, О. А. Червоненкис, А. Р. Янпольский. Математический анализ (вычисление элементарных функций), М., Физматгиз, 1963.