ИЗВЕСТИЯ
ТОМСКОГО ОРДЕНА ТРУДОВОГО КРАСНОГО ЗНАМЕНИ ПОЛИТЕХНИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА имени С. М. КИРОВА

Том 154 1967

РЕШЕНИЕ ПРЯМОЙ ЛУЧЕВОЙ ЗАСЕЧКИ НА ЗЕМНОМ СФЕРОИДЕ ПРИ РАССТОЯНИЯХ ДО ЦЕЛИ НЕ СВЫШЕ 1000—1500 КМ

Б. Ф. КРУТОЙ

(Представлена научным семинаром кафедр геодезии и маркшейдерского дела в январе 1960 г.)

В моей статье [1] даны два способа решения прямой лучевой засечки на земном сфероиде при любых расстояниях до цели. В первом из этих способов находятся только геодезические координаты цели. Во втором же способе координаты цели определяются совместно с расстояниями до нее от исходных точек.

В настоящей статье излагается несколько иной, более простой способ решения прямой лучевой засечки на земном сфероиде, который был найден мной ранее общих способов [1] и пригоден при расстояниях до цели не свыше 1000—1500 км. При этом ставится следующая задача:

> Известны геодезические координаты B_1, L_1 и B_2, L_2 исходных точек 1, 2 сфероида, а также известны геодезические азимуты $A_{1.3}$, $A_{2.3}$ в точках 1, 2 для выравненных лучей $\overset{\uparrow}{\odot} Л_{1.3}$, $\overset{\uparrow}{\odot} Л_{2.3}$, засекающих определяемую точку 3 сфероида. Найти геодезические координаты B_3, L_3 точки 3.

В основе предлагаемого частного способа решения прямой сфероидической засечки положены те же соображения, что и для первого общего способа [1]. Приведем эти соображения.

Предположим, что мы каким-нибудь способом, например — по карте, определили приближенное положение $B_3^{(0)}$ широты определяемой точки 3. Тогда мы можем по каждому засекающему лучу $\overset{\uparrow}{\odot} Л_{1.3}$, $\overset{\uparrow}{\odot} Л_{2.3} \in \overset{\uparrow}{\odot} Л_{i3}$ вычислить совершенно точно соответствующие широте $B_3^{(0)}$ приближенные разности долгот $\Delta L_{i3}^{(0)}$. В итоге получаем 2 приближенных положения $3_1^{(0)}$, $3_2^{(0)} \in 3_i^{(0)}$ определяемой точки 3, которые лежат на соответственных лучах $\overset{\uparrow}{\odot} Л_{1.3}$, $\overset{\uparrow}{\odot} Л_{2.3}$, имеют одну и ту же широту $B_3^{(0)}$ и несколько различающиеся между собой долготы $L_{\substack{i\\3}}^{(0)}$, где

$$L_{\substack{i\\3}}^{(0)} = L_i + \Delta L_{i3}^{(0)}. \tag{1}$$

Для точных разностей долгот $\Delta L_{i3} = L_3 - L_i$ между опорными точками $i = 1, 2$ и определяемой точкой 3 будет справедливо очевидное тождество

$$\Delta L_{1.3} - \Delta L_{2.3} = \Delta L_{1.2}. \tag{2}$$

Если же в это тождество вместо точных значений ΔL_{i3} вставим найденные выше приближенные значения $\Delta L_{i3}^{(0)}$, то получим некоторую невязку w_L:

$$w_L = (\Delta L_{1.3}^{(0)} - \Delta L_{2.3}^{(0)}) - \Delta L_{1.2}, \tag{3}$$

которая вызвана, очевидно, ошибками $\delta(\Delta L_{i3}^{(0)})$ указанных приближенных значений $\Delta L_{i3}^{(0)}$. Полагая, как обычно,

$$\Delta L_{i3}^{(0)} = \Delta L_{i3} + \delta(\Delta L_{i3}^{(0)}), \tag{4}$$

получим с учетом тождества (1), что

$$w_L = \delta(\Delta L_{1.3}^{(0)}) - \delta(\Delta L_{2.3}^{(0)}). \tag{5}$$

Ошибки $\delta(\Delta L_{i3}^{(0)})$ приближенных разностей долгот $\Delta L_{i3}^{(0)}$ вызваны, конечно, ошибкой $\delta B_3^{(0)}$ в принятом значении $B_3^{(0)}$ широты точки 3, где по определению

$$\delta B_3^{(0)} = B_3^{(0)} - B_3. \tag{6}$$

Поэтому если учесть, что

$$\Delta L_{i3} = F(B_i, A_{i3}, B_3) = F(B_i, A_{i3}, B_3^{(0)} - \delta B_3^{(0)}) = F_i, \tag{7}$$

то отсюда при малости ошибки $\delta B_3^{(0)}$ можно написать:

$$\Delta L_{i3} = F(B_i, A_{i3}, B_3^{(0)}) - \left(\frac{\partial F_i}{\partial B_3}\right)_0 \delta B_3^{(0)} = F_i^{(0)} - \frac{\partial F_i^{(0)}}{\partial B_3}\delta B_3^{(0)}.$$

Но из (7) вытекает, что

$$F(B_i, A_{i3}, B_3^{(0)}) = F_i^{(0)} = \Delta L_{i3}^{(0)}$$

и, следовательно,

$$\Delta L_{i3} = \Delta L_{i3}^{(0)} - \left[\frac{\partial(\Delta L_{i3})}{\partial B_3}\right]_0 \delta B_3^{(0)}. \tag{8}$$

Определив отсюда 2 значения $\Delta L_{i3}^{(0)} = \Delta L_{1.3}^{(0)}$, $\Delta L_{2.3}^{(0)}$ и подставляя их в выражение (3) для невязки w_L, получим уравнение для вычисления ошибки $\delta B_3^{(0)}$ в принятом значении $B_3^{(0)}$ широты точки 3:

$$\left[\frac{\partial(\Delta L_{1.3})}{\partial B_3} - \frac{\partial(\Delta L_{2.3})}{\partial B_3}\right]_0 \delta B_3^{(0)} - w_L = (a_{1.3} - a_{2.3})\,\delta B_3^{(0)} - w_L = 0, \tag{9}$$

где значок $^{\circ}$ напоминает, что производные должны подсчитываться при $B_3 = B_3^{(0)}$. Из сравнения (8) с (4) находим затем ошибки $\delta(\Delta L_{i3}^{(0)})$ в приближенных разностях долгот $\Delta L_{i3}^{(0)}$:

$$\delta(\Delta L_{i3}^{(0)}) = -\frac{\partial(\Delta L_{i3}^{(0)})}{\partial B_3}\delta B_3^{(0)} = -a_{i3}\,\delta B_3^{(0)}. \tag{10}$$

В заключение вычислим уточненные координаты $B_3^{(1)}$, $L_3^{(1)}$ определяемой точки 3:

$$1)\ B_3^{(1)} = B_3^{(0)} - \delta B_3^{(0)} \approx B_3;\quad 2)\ L_3^{(1)} = L_{\underset{3}{1}}^{(0)} - \delta(\Delta L_{1.3}^{(0)}) = L_{\underset{3}{2}}^{(0)} - \delta(\Delta L_{2.3}^{(0)}) \approx L_3, \tag{11}$$

которые можно принять в качестве окончательных B_3, L_3, если исходное значение $B_3^{(0)}$ взято достаточно точно. Если же исходное значение $B_3^{(0)}$ широты точки 3 было слишком грубым, то придется описанный здесь прием нахождения координат B_3, L_3 повторить еще один—два раза, взяв в качестве исходного значение $B_3^{(1)}$, полученное из первого приближения.

В изложенном здесь способе решения прямой засечки остались не выясненными два вопроса: 1) точное вычисление разностей долгот $\Delta L_{i3}^{(0)}$, соответствующих принятому значению $B_3^{(0)}$ широты точки 3; 2) вычисление коэффициентов a_{i3} уравнения (9).

Что касается коэффициентов a_{i3}, то они могут быть найдены так:

$$1)\ A'_{3i} = A_{3i} \pm 180^\circ; \quad 2)\ \sin A'_{3i} = \frac{V_3 \cos B_i}{V_i \cos B_3} \sin A_{i3}; \tag{12}$$

$$3)\ a_{i3} = \frac{\partial (\Delta L_{3i}^{(0)})}{\partial B_3} = \frac{\operatorname{tg} A'_{3i}}{V_3^2 \cos B_3},$$

где при подсчете коэффициентов a_{i3} полагаем $B_3 \approx B_3^{(0)}$.

Для точного же вычисления разностей долгот $\Delta L_{i3}^{(0)}$ можно предложить несколько путей. В первом общем способе [1] решения прямой сфероидической засечки для этой цели были взяты разложения по степеням малого параметра $\kappa_{i3}^2 \leqslant e^2$, полученные для интеграла

$$\beta_{i3}\, \Delta L_{i3} = (\nu\mu)_{i3} \int\limits_{\varphi_1}^{\varphi_2} \frac{d\varphi}{(1 - m_{i3}^2 \sin^2\varphi)\sqrt{1 - \kappa_{i3}^2 \sin^2\varphi}}, \quad \beta_{i3} = \pm 1, \tag{13}$$

где ν_{i3}, μ_{i3}, m_{i3}^2 — параметры, зависящие от B_i и A_{i3}, а φ — переменная интегрирования, зависящая от B_i, A_{i3} и B. Для подсчета разностей долгот $\Delta L_{i3}^{(0)}$ в общем случае могут быть взяты также найденные в (2) разложения по степеням $e^2\nu_{i3}^2$ интеграла

$$\beta_{i3}\, \Delta L_{i3} = \int\limits_{A_{i3}}^{A'_{3i}} \sqrt{\frac{\sin^2 A - e^2\nu_{i3}^2}{\sin^2 A - \nu_{i3}^2}}\, dA. \tag{14}$$

Наконец, если длины s_{i3} засекающих сторон $i3$ не выходят из некоторых определенных пределов, то разности $\Delta L_{i3}^{(0)}$ могут быть подсчитаны совершенно просто и точно из замкнутого выражения

$$\operatorname{tg}\frac{1}{2}\Delta L_{i3}^{(0)} = \frac{\sin\frac{1}{2}(B_3^{(0)} - B_i)}{\cos\frac{1}{2}(B_3^{(0)} + B_i)} \operatorname{tg}\frac{1}{2}(\Delta A_{i3}^{(0)} - \delta_{i3}), \tag{15}$$

где $\Delta A_{i3}^{(0)} = A_{3i}'^{(0)} - A_{i3}$, а δ_{i3} — очень малая поправка, не превышающая $0''.5$ при $s_{i3} \approx 1500$ *км*. В настоящей статье рассматривается тот способ решения прямой сфероидической засечки при ограниченной длине s_{i3} засекающих сторон $i3$, в котором для подсчета разностей $\Delta L_{i3}^{(0)}$ используется выражение (15). Основным содержанием статьи является вывод выражения для очень малой поправки δ_{i3}, входящей в (15). Дадим этот вывод.

Отобразим выравненную дугу $\Delta\Gamma_{1.2}$ земного сфероида на выравненную дугу $\Delta\Gamma_{1.2}^0$ шара радиуса a таким образом, чтобы для любой пары соответственных точек C, C^{0} на дугах $\Delta\Gamma_{1.2}$, $\Delta\Gamma^{0}_{1.2}$ были равны их сфероидические B и сферические φ широты, а для дуг $\Delta\Gamma_{1.2}$, $\Delta\Gamma^{0}_{1.2}$ в целом были равны их сфероидические $\Delta L_{1.2}$ и сферические $\Delta\lambda_{1.2}$ разности долгот точек $1, 2$ и $1^{\circ}, 2^{\circ}$. Таким образом мы принимаем следующий закон отображения сфероида на шар:

$$1)\ B = \varphi, \quad 2)\ \Delta L_{1.2} = \Delta\lambda_{1.2}. \tag{16}$$

Если при этом A и α — азимуты дуг $\Delta\Gamma_{1.2}$, $\Delta\Gamma^{0}_{1.2}$ в соответственных точках C, C°, а L и λ — долготы этих точек, то вообще

$$1)\ L \neq \lambda, \quad 2)\ A \neq \alpha, \tag{17}$$

что вытекает из дифференциального соотношения

$$\frac{d\lambda}{dL} = \frac{d\alpha}{dA} = (1 + e'^{2}\cos B)\frac{\operatorname{ctg}\alpha}{\operatorname{ctg}A} = V^{2}\frac{\operatorname{ctg}\alpha}{\operatorname{ctg}A}, \tag{18}$$

справедливого при законе отображения (16).

Предположим теперь, что сфероидический треугольник $P12$, образованный дугами меридиана $P1$, $P2$ и выравненной дугой $\Delta\Gamma_{1.2}$, отображен по закону (16) на шар радиуса a. Тогда для соответствующего отображенного треугольника $P^{\circ}1^{\circ}2^{\circ}$ на шаре, который будет по условию выравненным на этой поверхности, можно написать известное соотношение

$$\operatorname{tg}\frac{1}{2}\Delta\lambda_{1.2} = \frac{\sin\frac{1}{2}(\varphi_2 - \varphi_1)}{\cos\frac{1}{2}(\varphi_2 + \varphi_1)}\operatorname{tg}\frac{1}{2}\Delta\alpha_{1.2},$$

где $\Delta\alpha_{1.2} = \alpha'_{2.1} - \alpha_{1.2}$ есть разность прямых в точках 2° и 1° азимутов выравненной дуги $\Delta\Gamma^{0}_{1.2}$. На основании равенств (16) это соотношение может быть переписано в следующем виде, совпадающем с (15):

$$\operatorname{tg}\frac{1}{2}\Delta L_{1.2} = \frac{\sin\frac{1}{2}(B_2 - B_1)}{\cos\frac{1}{2}(B_2 + B_1)}\operatorname{tg}(\Delta A_{1.2} - \delta_{1.2}), \tag{19}$$

где

$$1)\ \Delta A_{1.2} = A'_{2.1} - A_{1.2}, \quad 2)\ \delta_{1.2} = \Delta\alpha_{1.2} - \Delta A_{1.2}. \tag{20}$$

Разность $\Delta A_{1.2}$ может быть подсчитана совершенно точно, если известны широты B_1, B_2 концов $1, 2$ дуги $\Delta\Gamma_{1.2}$ и азимут $A_{1.2}$ этой дуги в точке 1, так как

$$\sin A'_{2.1} = \frac{V_2\cos B_1}{V_1\cos B_2}\sin A_{1.2} = g_{1.2}\sin A_{1.2}. \tag{21}$$

Поэтому наша основная задача заключается в получении рабочего выражения для поправки $\delta_{1.2}$ и исследовании величины этой поправки при различной длине $s_{1.2}$ дуги $\Delta\Gamma_{1.2}$.

Для решения поставленной задачи учтем, что еще проф. Ф. А. Слудский в [2] нашел точное соотношение, связывающее азимут $\tilde{A}_{\varkappa\mu}$ прямого нормального сечения $\Delta\tilde{\Gamma}_{\varkappa\mu}$ в точке $\varkappa$ сфероида с азимутом $\alpha_{\varkappa\mu}$ выравненной дуги $\Delta\Gamma^0_{\varkappa\mu}$ в соответственной точке $\varkappa^0$ шара при изображении сфероида на шаре по закону (16):

$$\operatorname{ctg}\tilde{A}_{\varkappa\mu} = \operatorname{ctg}\alpha_{\varkappa\mu} - \frac{e^2\,[V_\varkappa \sin B_\mu - V_\mu \sin B_\varkappa]\cos B_\varkappa}{V_\varkappa \cos B_\mu \sin \Delta L_{\varkappa\mu}}, \quad \begin{pmatrix}\varkappa = 1,2\\ \mu = 2,1\end{pmatrix}^* . \qquad (22)$$

Азимут же $\tilde{A}_{\varkappa\mu}$ прямого нормального сечения $\Delta\tilde{\Gamma}_{\varkappa\mu}$ в точке $\varkappa$ сфероида при расстояниях $\tilde{s}_{\varkappa\mu} \leqslant 1000$ *км* очень мало отличается от азимута $A_{\varkappa\mu}$ выравненной дуги $\Delta R_{\varkappa\mu}$ в той же точке $\varkappa$ сфероида. Это видно из полученного в [3] выражения для разности $\delta A_{\varkappa\mu} = \tilde{A}_{\varkappa\mu} - A_{\varkappa\mu} = \eta_{\varkappa\mu}$ указанных азимутов:

$$\left.\begin{aligned}
\delta A''_{\varkappa\mu} &= (\tilde{A}_{\varkappa\mu} - A_{\varkappa\mu})'' = \rho''\frac{(e')^2}{6}\bar{\sigma}^2_{\varkappa\mu}\cos^2 B_\varkappa \sin A_{\varkappa\mu}\Big[\cos A_{\varkappa\mu} - \\
&- \frac{\bar{\sigma}_{\varkappa\mu}}{4}\operatorname{tg} B_\varkappa + \frac{\bar{\sigma}^2_{\varkappa\mu}}{6}\cos A_{\varkappa\mu} - (e')^2\cos^3 A_{\varkappa\mu}\Big] = \rho''\frac{(e')^2}{12}\bar{\sigma}^2_{\varkappa\mu}\Big(1 - \\
&- \frac{\bar{\sigma}^2_{\varkappa\mu}}{6}\Big)\cos^2 B_\varkappa \sin 2A_{\varkappa\mu} - \rho''\frac{(e')^2}{48}\bar{\sigma}^3_{\varkappa\mu}\sin 2B_\varkappa \sin A_{\varkappa\mu} - \\
&- \rho''\frac{(e')^4}{12}\bar{\sigma}^2_{\varkappa\mu}\cos^2 B_\varkappa \sin 2A_{\varkappa\mu}\cos^2 A_{\varkappa\mu} = \eta''_{\varkappa\mu},
\end{aligned}\right\} \qquad (23)$$

где

$$1)\ \begin{pmatrix}\varkappa = 1,2\\ \mu = 2,1\end{pmatrix}, \quad 2)\ \bar{\sigma}_{\varkappa\mu} = \frac{s_{\varkappa\mu}}{N_\varkappa} = \bar{\sigma}_{\mu\varkappa}, \quad 3)\ N^2_\varkappa = \frac{a^2(1 - e'^2)}{1 + e'^2\cos^2 B_\varkappa}, \qquad (24)$$

$$e'^2 = \frac{a^2 - b^2}{b^2};$$

a, b — большая и малая полуоси земного сфероида.

Из приведенных соображений вытекает, что искомую поправку $\delta_{1.2}$ целесообразно представить в следующем преобразованном виде:

$$\delta_{1.2} = \Delta A_{1.2} - \Delta\alpha_{1.2} = (\Delta\tilde{A}_{1.2} - \Delta\alpha_{1.2}) - (\Delta\tilde{A}_{1.2} - \Delta A_{1.2}),$$

где на основании (21)

$$\Delta\tilde{A}_{1.2} - \Delta A_{1.2} = (\tilde{A}_{2.1} - \tilde{A}_{1.2} \pm 180^\circ) - (A_{2.1} - A_{1.2} \pm 180^\circ) =$$

$$= (\tilde{A}_{2.1} - A_{2.1}) - (\tilde{A}_{1.2} - A_{1.2}) = \delta A_{2.1} - \delta A_{1.2} = \eta_{2.1} - \eta_{1.2}. \qquad (25)$$

Отсюда для поправки $\delta_{1.2}$ получим уточненное выражение

$$\delta_{1.2} = (\Delta A_{1.2} - \Delta\alpha_{1.2}) - (\delta A_{2.1} - \delta A_{1.2}) = \varepsilon_{1.2} - \Delta\eta_{1.2}, \qquad (26)$$

которое сводит вычисление $\delta_{1.2}$ к расчету двух частных поправок $\varepsilon_{1.2}$ и $\Delta\eta_{1.2}$.

Поправка $\Delta\eta_{1.2} = (\eta_{2.1} - \eta_{1.2})$ может быть найдена согласно (23). Определение этой поправки существенно облегчается применением номограмм, составленных А. Г. Лесняком [4]. Что касается первой частной поправки $\varepsilon_{1.2}$, то мы получим ниже простое выражение для ее подсчета через поправки $\eta_{1.2}$ и $\eta_{2.1}$.

---

*) Слудский выразил разность ($\operatorname{ctg}\alpha_{\varkappa\mu} - \operatorname{ctg}\tilde{A}_{\varkappa\mu}$ через приведенные широты $u_\varkappa$, u_μ).

Для нахождения указанной поправки $\varepsilon_{1.2}$ мы прежде всего приведем исходное выражение (22) к виду

$$\sin(\widetilde{A}_{\varkappa\mu} - \alpha_{\varkappa\mu}) = \frac{e^2 \cos B_\varkappa \sin \widetilde{A}_{\varkappa\mu}}{V_\varkappa \sin \sigma_{\varkappa\mu}} (V_\varkappa \sin B_\mu - V_\mu \sin B_\varkappa), \tag{27}$$

где было учтено, что если $\sigma_{\varkappa\mu}$ — угловая мера дуги $\Delta \Gamma^\circ_{\varkappa\mu}$, то

$$\frac{\sin \alpha_{\varkappa\mu}}{\cos B_\mu \sin \Delta L_{\varkappa\mu}} = \operatorname{cosec} \sigma_{\varkappa\mu}. \tag{28}$$

Заменив теперь в правой части равенства (27) величину $\widetilde{A}_{\varkappa\mu}$ через $A_{\varkappa\mu}$ согласно (21):

$$\widetilde{A}_{\varkappa\mu} = A_{\varkappa\mu} + \delta A_{\varkappa\mu},$$

разложим $\sin \widetilde{A}_{\varkappa\mu}$ в ряд Тейлора. Мы получим:

$$\sin \widetilde{A}_{\varkappa\mu} = \sin A_{\varkappa\mu} + \cos A_{\varkappa\mu}\, \delta A_{\varkappa\mu} - \frac{1}{2} \sin A_{\varkappa\mu} (\delta A_{\varkappa\mu})^2 - \ldots \tag{29}$$

Кроме того учтем, что основному свойству выравненной кривой $\Gamma_{\varkappa\mu}$ на сфероиде вращения

$$\frac{\cos B_\varkappa}{V_\varkappa} \sin A_{\varkappa\mu} = \frac{\cos B_\mu}{V_\mu} \sin A'_{\mu\varkappa} = - \frac{\cos B_\mu}{V_\mu} \sin A_{\mu\varkappa}. \tag{30}$$

Используя затем ценную связь (30) и равенство $\sigma_{\varkappa\mu} = \sigma_{\mu\varkappa}$, введем в (27) сокращенные обозначения $Q_{\varkappa\mu}$, $Q_{\mu\varkappa}$, определив их соотношениями:

$$Q_{\varkappa\mu} \sin A_{\varkappa\mu} = \left[\frac{e^2 \cos B_\varkappa}{V_\varkappa \sin \sigma_{\varkappa\mu}} (V_\varkappa \sin B_\mu - V_\mu \sin B_\varkappa) \right] \sin A_{\varkappa\mu} =$$

$$= \left[\frac{e^2 \cos B_\mu}{V_\mu \sin \sigma_{\mu\varkappa}} (V_\mu \sin B_\varkappa - V_\varkappa \sin B_\mu) \right] \sin A_{\mu\varkappa} = Q_{\mu\varkappa} \sin A_{\mu\varkappa}. \tag{31}$$

Разложив, наконец, в левой части равенства (27) синус малой дуги $(\widetilde{A}_{\varkappa\mu} - \alpha_{\varkappa\mu})$ в ряд, представим (27) в следующем развернутом виде:

$$(\widetilde{A}_{\varkappa\mu} - \alpha_{\varkappa\mu}) - \frac{1}{6} (\widetilde{A}_{\varkappa\mu} - \alpha_{\varkappa\mu})^3 =$$

$$= Q_{\varkappa\mu} \left[\sin A_{\varkappa\mu} + \cos A_{\varkappa\mu}\, \delta A_{\varkappa\mu} - \frac{1}{2} \sin A_{\varkappa\mu} (\delta A_{\varkappa\mu})^2 \right]. \tag{27.1}$$

Чтобы вывести теперь нужное нам выражение для поправки $\varepsilon_{1.2} = \Delta \widetilde{A}_{1.2} - \Delta \alpha_{1.2}$, входящей в (26), положим в (27.1) сначала $\varkappa = 1$, $\mu = 2$, затем примем $\varkappa = 2$, $\mu = 1$. Вычитая тогда из второго значения для равенства (27.1) его первое значение и пренебрегая очень малыми разностями порядка выше e^8:

$$1)\ \frac{1}{6} \left[(\widetilde{A}_{2.1} - \alpha_{2.1})^3 - (\widetilde{A}_{1.2} - \alpha_{1.2})^3 \right],$$

$$2)\ -\frac{1}{2} \left[Q_{2.1} \cos A_{2.1} (\delta A_{2.1})^2 - Q_{1.2} \cos A_{1.2} (\delta A_{1.2})^2 \right],$$

получим с учетом обозначений (31) следующее сжатое выражение разности $(\tilde{A}_{2.1}-\alpha_{2.1})-(\tilde{A}_{1.2}-\alpha_{1.2})=(\tilde{A}_{2.1}-\tilde{A}_{1.2}\pm 180^\circ)-(\alpha_{2.1}-\alpha_{1.2}\pm$ $\pm 180^\circ)\,\Delta\tilde{A}_{1.2}-\Delta\alpha_{1.2}=\varepsilon_{1.2}$ через поправки $\delta A_{1.2}$, $\delta A_{2.1}$:

$$\varepsilon_{1.2}=\Delta\tilde{A}_{1.2}-\Delta\alpha_{1.2}=(Q_{2.1}\cos A_{2.1})\,\delta A_{2.1}-(Q_{1.2}\cos A_{1.2})\,\delta A_{1.2}. \qquad (32)$$

Так как величины $Q_{\varkappa\mu}$, $\delta A_{\varkappa\mu}$, входящие в равенство (32), имеют малость порядка не ниже e^2, то сама величина $\varepsilon_{1.2}$, определяемая этим равенством, будет порядка не ниже e^4 при расстояниях $s_{1.2}$ до 1000 *км*.

Определив первую поправку $\varepsilon_{1.2}$, входящую в (26), мы можем вычислить наконец и полную поправку $\delta_{1.2}$:

$$\delta_{1.2}=\varepsilon_{1.2}-\Delta\eta_{1.2}=(Q_{2.1}\cos A_{2.1}-1)\,\delta A_{2.1}-(Q_{1.2}\cos A_{1.2}-1)\,\delta A_{1.2}. \qquad (33)$$

Полученное выражение для полной поправки $\delta_{1.2}$ показывает, что при расстояниях $s_{1.2}$ до 1000 *км* величина $\delta_{1.2}$ будет порядка не ниже e^2. Действительные значения поправки $\delta_{1.2}$ для расстояний $s_{1.2}$ до 400 *км* будут очень малы, что видно из сводки 1. На основании данных этой сводки можно подсчитать, что даже при $s_{1.2}=400$ *км* поперечное смещение $\lambda_{1.2}$ конца 2 для луча $\overset{\uparrow}{\odot}$ $Л_{1.2}$ за счет поправки $\delta_{1.2}$ будет равно 2 *см*, т. е. пренебрегаемо мало. Поэтому для расстояний $s_{1.2}$ до 400—500 *км* можно с высокой степенью точности принять $\Delta\alpha_{1.2}=\Delta A_{1.2}$. Для расстояний же 500 *км* $< s_{1.2} \leqslant$ 1000 *км* достаточно положить, что $\delta_{1.2}=\delta A_{2.1}-\delta A_{1.2}=\eta_{2.1},-\eta_{1.2}$, и расчеты всех членов разложения (21), кроме первого, произвести по номограммам А. Г. Лесняка [4].

Сводка 1

	B_1	B_2	$s_{1.2}$ *м*	$A_{1.2}$	$A'_{2.1}$	$\delta_{1.2}=\Delta A_{1.2}-\Delta\alpha_{1.2}$
1	50 40 00	50 59 37	50 000	43 08 04	43 30 39	+0″.000020
2	50 40 00	51 30 54	130 401	43 08 04	44 08 02	+0″.000330
3	50 40 00	52 20 55	260 802	43 08 04	45 10 58	+0″.002567
4	50 40 00	53 10 00	391 203	43 08 04	46 17 02	+0″.009013

Насколько мала поправка $\delta_{1.2}$ даже при очень больших расстояниях $s_{1.2}$ показывает следующий пример. Пусть $B_1=50$, $A_{1.2}=40^\circ$, $s_{1.2}=$ $=1500$ *км*. Тогда $B_2=59^\circ17'03''$, $\Delta\alpha_{1.2}=17^\circ03'34''$, $A'_{2.1}=53^\circ57'00''$, и мы найдем, что $\delta_{1.2}=+0''.513$. В этом случае поперечное смещение $\lambda_{1.2}$ конца 2 луча $\overset{\uparrow}{\odot}$ $Л_{1.2}$ достигнет 3,8 *м*, чем при некоторых расчетах можно также пренебречь.

Из сказанного, таким образом, вытекает, что при решении сфероидической засечки с длинами s_{i3} засекающих сторон до 1000—1500 *км* для точного подсчета приближенных разностей долгот $\Delta L_{i3}^{(0)}$ уместно применить очень простое выражение (15), в котором при указанных выше пределах для s_{i3} можно даже принять $\delta_{i3}=0$.

Что касается приближенного значения $B_3^{(0)}$ широты точки 3, которое входит в равенство (15), то его можно взять прямо с карты с ошибкой 1′—5′ или получить решением прямой засечки на шаре, как это сделано в [1]. Тогда для нахождения значения B_3 с достаточной степенью точности потребуется 2 приближения. Наконец, если известен измеренный угол γ_3 при определяемой точке 3, что имеет место в поверхностных лучевых сетях со всеми измеренными углами, то $B_3^{(0)}$ с высокой степенью точности может быть вычислено с помощью последовательности расчетных выражений, указанной в моей статье [5].

ЛИТЕРАТУРА

1. Б. Ф. Крутой. Общие способы решения основных расчетных задач на земном сфероиде. Томск, Известия ТПИ, том 131, 1965.
2. Ф. А. Слудский. Триангуляция без базиса. Москва, 1865.
3. Ф. Н. Красовский. Руководство по высшей геодезии, часть 2, Москва, 1942.
4. А. Г. Лесняк. Номограммы для вычисления поправки за уклонение геодезической линии от прямого нормального сечения. Томск, известия ТПИ, том 154, 1967.
5. Б. Ф. Крутой. Общие способы решения основных расчетных задач на поверхности земного сфероида. Томск, Известия ТПИ, том 118, 1963.