ИЗВЕСТИЯ
ТОМСКОГО ОРДЕНА ТРУДОВОГО КРАСНОГО ЗНАМЕНИ ПОЛИТЕХНИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА имени С. М. КИРОВА

Том 154 1967

ПЛОТНОСТЬ ОРИЕНТИРОВАННОЙ КРИВОЙ

Л. Е. ПОРТНОВ

(Представлена в мае 1966 года математической секцией научно-технической конференции АВТФ, посвященной 70-летию ТПИ)

Под параметризованной ориентированной кривой метрического пространства R будем понимать отображение

$$f(t), \quad t \in E \subset [0, 1], \text{ в } R.$$

Определение 1. Компонентой отображения $f(t)$, $t \in E \subset [0, 1]$, в R будем называть всякое $F \subset E$, обладающее свойствами:

1) из t_1, $t_2 \in F$ следует $f(t_1) = f(t_2)$;

2) любая точка $t \in E$, F строго мажорирует точки множества F либо снизу, либо сверху.

Определение 2. Отображение $f(t)$, $t \in F \subset [0, 1]$ в метрическое пространство R назовем точкой параметризованной кривой, определяемой отображением $f(t)$, $t \in E \subset [0, 1]$, если F является компонентой отображения $f(t)$, $t \in E \subset [0, 1]$.

Ориентированной кривой L сопоставим функцию

$$V_L(\varepsilon), \quad \varepsilon \in (0, \infty),$$

равную максимальному числу непересекающихся дуг кривой L, каждая из которых имеет диаметр не меньше ε.

Рассмотрим функцию

$$K_L(\lambda) = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{V_L(\lambda\varepsilon)}{V_L(\varepsilon)}, \quad \lambda \in [0, 1]. \tag{1}$$

Используя предельный переход, можно, исходя из (1), однозначно сопоставить каждой точке кривой L функцию

$$\varkappa_x(\lambda), \qquad \lambda \in (0, 1),$$

являющуюся локальным метрическим инвариантом кривой L.

Введем функцию плотности кривой L в точке

$$p(x) = \frac{1}{2 \int\limits_0^1 \varkappa_x(\lambda)\, d\lambda}, \quad x \in L, \quad \lambda \in [0, 1],$$

являющаяся аналогом кривизны кривой.

1. Если в любой окрестности точки x кривая L имеет конечную не нулевую обычную длину, то

$$p(x) = 1.$$

2. Если любая окрестность точки x неспрямляема, то

$$1 \leqslant p(x) < \infty.$$

3. Если в любой окрестности U_x точки $x \in L$ есть окрестность $V_x \subset U_x$, где кривая L несвязна и спрямляема, то

$$\frac{1}{2} \leqslant p(x) \leqslant 1.$$