ИЗВЕСТИЯ
ТОМСКОГО ОРДЕНА ТРУДОВОГО КРАСНОГО ЗНАМЕНИ ПОЛИТЕХНИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА имени С. М. КИРОВА

Том 156 1969

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ЗАХВАТА ЧАСТИЦ В СИНХРОТРОНЕ

В. В. ЦЫГАНКОВ

В синхротроне со слабой фокусировкой изменение ускоренного до конечной энергии заряда от цикла к циклу вызывается в основном изменением таких параметров, как моменты включения инжекции и ускоряющего высокочастотного (ВЧ) напряжения, энергия инжекции, начальная частота генератора. Построение математической модели захвата является начальным этапом проектирования системы автоматической оптимизации условий захвата.

Рассматривается многооборотная инжекция частиц в синхротрон при следующих допущениях: не учитывается коллективное взаимодействие частиц при инжекции, показатель спада магнитного поля n, постоянный по радиусу и азимуту сектора электромагнита и одинаковый во всех секторах, поле внутри прямолинейных участков отсутствует, амплитуда ускоряющего ВЧ-напряжения устанавливается за время, которым можно пренебречь по сравнению с периодом радиально-фазовых колебаний.

Процесс инжекции разделяется на два этапа [1]. На 1-м этапе инжекции, который длится до момента включения ВЧ-поля, частицы инжектируются на мгновенную орбиту, сжимающуюся к центру из-за роста магнитного поля. В соответствии с протеканием 1-го этапа инжекции вычисляется функция распределения частиц $g_{\min}(u, \gamma)$ по координатам u и γ (где u — расстояние от внутренней пластины инфлектора до мгновенной орбиты, γ — угол между направлением вылета частиц из инфлектора и касательной к мгновенной орбите в месте, где установлен инфлектор). В отличие от функции распределения частиц по амплитудам бетатронных колебаний $\psi(A)$ [1] функция $g_{\min}(u, \gamma)$ дает возможность учесть в соотношениях захвата n изменение момента инжекции и энергии инжектируемых частиц.

Решение уравнения бетатронных колебаний на азимуте инфлектора σ для ускорителей типа рейстрек имеет вид [1]:

$$x_k = F_c(\sigma) \cdot \cos(4\mu k + \alpha(\sigma)), \tag{1}$$

где

$$F_c(\sigma) = 2\,(D \sin\sigma + d\,D \cdot \cos\sigma), \tag{2}$$

$$\alpha(\sigma) = \arg(D \cdot \sin\sigma + dD \cdot \cos\sigma),$$

$$D = \frac{\frac{R\gamma}{\varkappa} d^* - x_0}{d^* - d}, \quad d = \frac{c - e^{i\lambda}}{s}, \quad d^* = \frac{c - e^{-i\lambda}}{s},$$

$$c = \cos\frac{\pi}{2}\varkappa, \qquad s = \sin\frac{\pi}{2}\varkappa, \quad \cos\mu = c - ps,$$

$$p = \frac{l\varkappa}{2R}, \quad \sigma = \frac{\varkappa S}{R}, \quad \varkappa = \sqrt{1-n},$$

S — расстояние от края сектора до инфлектора по направлению движения частиц,
R — радиус равновесной орбиты,
l — длина прямолинейного промежутка,
γ — угол между направлением вылета частицы и касательной к равновесной орбите на азимуте,
x_0 — начальное отклонение частицы от мгновенной орбиты,
x_κ — значение x на κ-ом обороте ($\kappa = 0, 1, 2 \ldots$).

Выполняя операции (2) и подставляя выражения для $F_c(\sigma)$ и $\alpha(\sigma)$ в (1), получим:

$$x_\kappa = x_0 B(\kappa) + \frac{\gamma R}{\varkappa} A(\kappa), \tag{3}$$

где

$$A(\kappa) = a\cos 4\mu\kappa + \frac{s(b+pa)+2pbc}{\sin\mu}\sin 4\mu\kappa,$$

$$B(\kappa) = b\cos 4\mu\kappa - \frac{s(a+pb)}{\sin\mu}\cdot\sin 4\mu\kappa,$$

$$a = \sin\sigma, \; b = \cos\sigma.$$

В области $u > 0$ условие обхода инфлектора имеет вид:

$$(g+u)B(\kappa) + \frac{\gamma R}{\varkappa} A(\kappa) \leqslant \Delta R_{об}\kappa + u, \tag{5}$$

где $\Delta R_{об}$ — сжатие мгновенной орбиты за оборот,
g — расстояние от внутренней пластины инфлектора до частицы, а
u — от внутренней пластины до мгновенной орбиты в момент вылета частицы из инфлектора.

Из (5) следуют два неравенства:

$$1)\; g_1(\kappa) \leqslant \frac{1-B(\kappa)}{B(\kappa)}\cdot u - \frac{A(\kappa)}{B(\kappa)}\,\frac{R}{\varkappa}\gamma + \frac{\Delta R_{об}\kappa}{B(\kappa)}, \tag{6}$$

если $B(\kappa) > 0$, и

$$2)\; g_2(\kappa) \geqslant \frac{1-B(\kappa)}{B(\kappa)}\cdot u - \frac{A(\kappa)}{B(\kappa)}\cdot\frac{R}{\varkappa}\gamma + \frac{\Delta R_{об}\kappa}{B(\kappa)}, \tag{7}$$

если $B(\kappa) < 0$.

В (6) и (7) для фиксированных значений $n, \Delta R_{об}, \gamma, u$ и среди $\kappa = 1, 2, 3, \ldots$ найдем такое значение $\kappa = \kappa'$, при котором $g_1(\kappa')$ минимально, и такое значение $\kappa = \kappa''$, при котором $g_2(\kappa'')$ максимально. Тогда область инфлектора, вылетев из которой частицы будут захвачены в 1-й этап инжекции, равна:

$$0 \leqslant g_2(\kappa'') \leqslant g_1(\kappa') \leqslant g_1, \tag{8}$$

где g_1 — ширина инфлектора.

Аналитические методы исследования функции $g(\kappa)$ дискретного аргумента κ отсутствуют, поэтому операцию нахождения κ' и κ'' приходится выполнять численно.

В первый момент после включения ВЧ-поля частицы распределяются по фазам φ_0 ускоряющего напряжения. Область фаз (φ_1, φ_2), ограниченная сепаратрисой, представляет геометрическое место точек синхротронных орбит, вокруг каждой из которых частицы распределены по положениям мгновенной орбиты в соответствии с первым этапом инжекции. Через четверть периода радиально-фазовых колебаний синхротронная орбита, имеющая начальную фазу φ_0, будет на расстоянии $y \sim \dot{\varphi}(\varphi_s)$ от равновесной орбиты, поэтому область интегрирования по u для данной синхротронной орбиты равняется $(0, u_1, -y)$ (φ_s — равновесная фаза, u_1 — расстояние от внутренней пластины инфлектора до центра рабочей области). Если энергия инжектируемых частиц изменилась на величину $+\Delta E$, то азимутальный размер сгустка в плоскости $(\varphi, \dot{\varphi})$ будет равен $y_{02} - y_{01} = \dot{\varphi}(\Delta E)$, а нижний предел интегрирования по y равен $y_0 = \dfrac{R_s \Delta E}{\beta^2 (1-n) E}$. В случае, когда область интегрирования по u не зависит от γ, заряд, захваченный в ускорение с учетом двух этапов инжекции, равен:

$$Q = \int_{\gamma_1}^{\gamma_2} \int_{0}^{y_{01}} \int_{\varphi_{01}}^{\varphi_{02}} \int_{y_0}^{y_1} \int_{0}^{u_1 - y} \int_{0}^{g_{\min}(u_1 \gamma)} q(\gamma, y_0, \varphi_0, y, u, g) \times$$

$$\times\, dg\,du\,dy\,d\varphi_0\,dy_0\,d\gamma, \tag{9}$$

q — функция распределения инжектируемых частиц по углу γ, энергии y_0, начальной фазе φ_0 ВЧ-напряжения, амплитудам радиально-фазовых колебаний $y \sim \dot{\varphi}(\varphi_s)$ без учета бетатронных колебаний, длительности импульса инжекции u, ширине инфлектора g;

y_1 — радиальный полуразмер сепаратрисы;

$$g_{\min}(u, \gamma) = g_1(\kappa') = \frac{1 - B(\kappa')}{B(\kappa')} \cdot u - \frac{A(\kappa')}{B(\kappa')} \frac{R}{\varkappa} \gamma + \frac{\Delta R_{об} \cdot \kappa'}{B(\kappa')}. \tag{10}$$

Далее положим, что соотношение между координатами φ_0 и y линейное, т. е. если распределение частиц по фазам φ_0 равномерное, то распределение частиц по y (без учета бетатронных колебаний) можно также считать равномерным. Такое допущение можно сделать, если в выражении [1]

$$\varepsilon_{1,2} = \frac{2(1 - \varphi_s \operatorname{ctg} \varphi_s)^{1/2}}{\pi} \frac{y}{y_1} \left[1 + \kappa_{1,2} \left(\frac{y}{y_1} \right)^2 \right], \tag{10}$$

устанавливающем связь между амплитудами радиальных и фазовых колебаний, пренебречь членом $\kappa_{1,2} \left(\dfrac{y}{y_1} \right)^2$ ($\kappa_{1,2} = 0{,}2 \div 0{,}25$; $0 \leqslant y \leqslant y_1$), который „дает небольшую поправку“ [1]. Для случая равномерного распределения заряда

$$q(\gamma, y_0, \varphi_0, y, u, g) = \frac{I}{g_1 \cdot \left| \dfrac{dR}{dt} \right| \cdot y_1 \cdot 2\pi y_{01} (\gamma_2 - \gamma_1)}, \tag{11}$$

где I — ток инжектора.

Область интегрирования по φ_0 при $\Delta E \neq 0$ можно определить, если в выражении [2]

$$\varepsilon_{y_0}(y = y_1) = \frac{\varphi_{02} - \varphi_{01}}{\pi} = \frac{2(1 - \varphi_s \cdot \operatorname{ctg} \varphi_s)^{1/2}}{\pi} \left(\sqrt{1 - \left(\frac{y_0}{y_1} \right)^2} + \right.$$

$$\left. + \kappa_{1,2} \left[\sqrt{1 - \left(\frac{y_0}{y_1} \right)^2} \right]^3 \right). \tag{12}$$

пренебречь членом $\kappa_{1,2}\left[\sqrt{1-\left(\frac{y_0}{y_1}\right)^2}\right]^3$, $0 \leqslant y_0 \leqslant y_1$. Подставляя (10), (11), (12) в (9), легко вычислить интегралы (9).

Помимо вышеуказанных допущений относительно вида функций $\varepsilon_{1,2}$ и ε_{y_0}, которые не носят принципиального характера, в формуле (9) не учтено изменение функции $g_{\min}(u, \gamma)$ в области мгновенных орбит, близких к синхротронной. Действительно, если мгновенная орбита совпадает с синхротронной, отстоящей от равновесной на расстоянии y, то $g_{\min}(u, \gamma)$, так как период синхротронных колебаний много больше периода бетатронных колебаний. Для каждой мгновенной орбиты максимальная амплитуда бетатронных колебаний (для ускорителя без прямолинейных промежутков) равна $A = \sqrt{[u + g_{\min}(u, \gamma)]^2 + \left(\frac{\gamma R}{\varkappa}\right)^2}$.

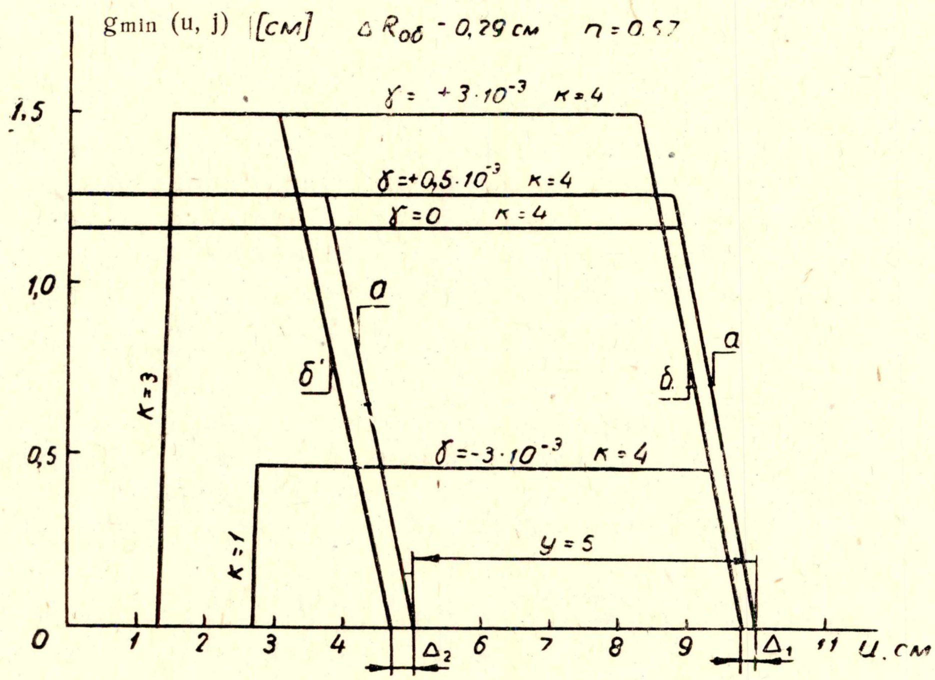

Рис. 1. Функция распределения по u и γ и ее изменение на 2-м этапе инжекции

Если $A < u_1 - y$, то распределение частиц по u находится согласно (10), если же $A > u_1 - y$, то функция распределения равна:

$$g'_{\min}(u, \gamma) = g_{\min}(u, \gamma) - \{A - (u_1 - y)\}. \qquad (13)$$

Таким образом, область интегрирования по u разбивается на две: $(0, u')$ и $(u', u'' \approx u_1 - y)$, u' находится из условия равенства фигурной скобки нулю, а u'' из условия $g'_{\min}(u, \gamma) = 0$. На рис. 1 представлен график функции $g_{\min}(u, \gamma)$ (10), (13), расчитанный для параметров синхротрона 1,5 *Гэв* ТПИ. Из рис. 1 видно, что погрешность формулы (9), которая вызвана тем, что не учитывается изменение $g_{\min}(u, \gamma)$ в области мгновенных орбит, близких к синхротронным, одного порядка для параллельного пучка с $\gamma = 0$ и $\gamma \neq 0$. Коэффициент захвата во второй этап инжекции для параллельного моноэнергетического пучка, расчитанный по формуле (9), равен:

$$\eta_2 = \frac{Q}{Q_1} = \frac{\varphi_2 - \varphi_1}{2\pi} \cdot \frac{1}{2} \quad (\text{при } y_1 = u_1),$$

$$\eta_2 = \frac{\varphi_2 - \varphi_1}{2\pi} \cdot \frac{3}{4} \quad \left(\text{при } y_1 = \frac{1}{2} u_1\right), \tag{14}$$

где Q_1 — заряд, захватываемый на первом этапе инжекции, $\varphi_2 - \varphi_1 = f(y_1)$ — азимутальный размер сепаратрисы.

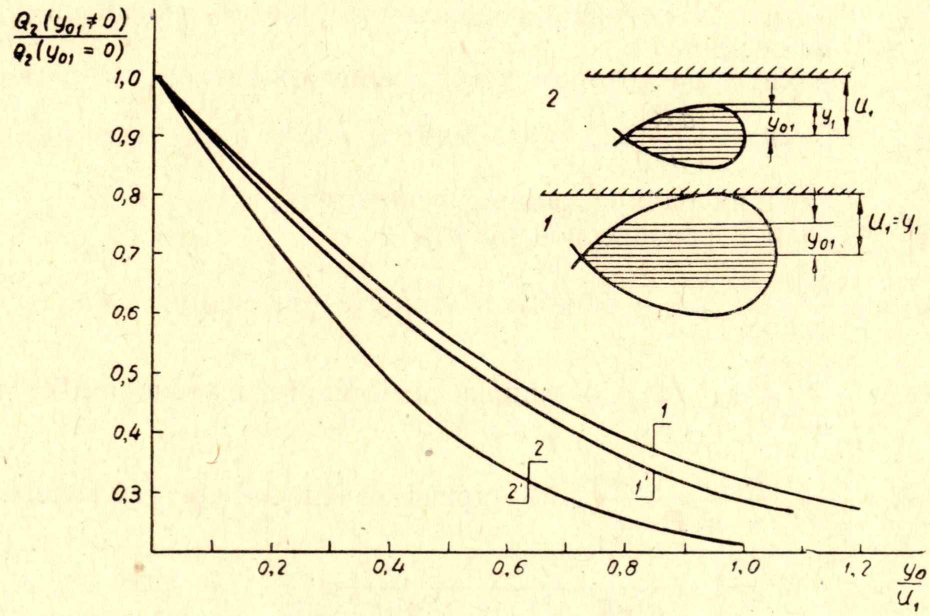

Рис. 2. Зависимость захваченного заряда от энергетического разброса $y_{01} \sim \Delta E_{\max}$

С учетом изменения $g_{\min}(u, \gamma)$ (при $\gamma = 0$)

$$\eta_2' = \frac{\varphi_2 - \varphi_1}{2\pi}\left(\frac{1}{2} - \frac{g_1}{u_1} + \frac{3}{2}\,\frac{g_1^2}{u_1^2}\right) \quad (\text{при } y_1 = u_1)$$

и

$$\eta_2' = \frac{\varphi_2 - \varphi_1}{2\pi}\left(\frac{3}{4} - \frac{g_1}{u_1}\right) \quad \left(\text{при } y_1 = \frac{1}{2} u_1\right). \tag{15}$$

Так как $g_1 \ll u_1$, то погрешность формулы (9) незначительна.

Потери частиц за счет энергетического разброса можно оценить по формуле, которая получается из (9) при $\gamma = 0$, $y_1 = u_1$, $y_{01} = u_1 x$:

$$\frac{Q(y_{01} \neq 0)}{Q(y_{01} = 0)} =$$

$$= \frac{2\left[\frac{5}{16} x \sqrt{1 - x^2} + \left(\frac{1}{3} - \frac{x}{8}\right)\sqrt{(1 - x^2)^3} - \frac{1}{3} + \frac{5}{16} \arcsin x\right]}{x}. \tag{16}$$

В квадратной скобке $0 \leqslant x \leqslant 1$. На рис. 2 представлены следующие графики функции $\frac{Q(y_{01} \neq 0)}{Q(y_{01} = 0)}$: цифрой 1 обозначен график, рассчитанный без учета, а $1'$ — с учетом изменения $g_{\min}(u)$ на втором этапе инжекции для параметров синхротрона 1,5 *Гэв* ТПИ ($g_1 = 1{,}5$ *см*, $u_1 = 10$ *см*) и $y_1 = u_1$; цифрой 2 — график без учета, а $2'$ — с учетом изменения $g_{\min}(u)$ для параметров синхрофазотрона 10 *Гэв* ОИЯИ г. Дубна ($g_1 = 3$ *см*, $u_1 = 50$ *см*) и $y_1 = \frac{1}{2} u_1$.

Рассмотрим захват параллельного моноэнергетического пучка при неоптимальных условиях захвата. Введем обозначения:

R_1 — радиус мгновенной орбиты в момент включения импульса инжекции;

R_2 — радиус мгновенной орбиты в момент включения ВЧ-поля;

R_2' — радиус мгновенной орбиты в момент окончания импульса инжекции;

$R_{\text{инф}}$ — радиус, на котором установлен инфлектор;

$R_1 - R_2' = u_{\text{и}} = \left|\frac{dR}{dt}\right| \Delta\tau_{\text{и}}$, $\Delta\tau_{\text{и}}$ — длительность импульса инжекции

$\overline{R_s}$ — средний радиус камеры ускорителя;

R_s — радиус равновесной орбиты;

$\Delta u_{\text{и}} = \left|\frac{dR}{dt}\right| \Delta\tau_{\text{и}}$, $\Delta\tau_{\text{и}}$ — ошибка в моменте инжекции;

$\Delta u_{\text{вч}} = \left|\frac{dR}{dt}\right| \Delta\tau_{\text{вч}}$, $\Delta\tau_{\text{вч}}$ — ошибка в моменте включения ВЧ-поля:

$\Delta u_{\omega} = \frac{R_s}{\beta^2 (1-n) F} \cdot \frac{\Delta\omega}{\omega_s}$, $\Delta\omega$—дрейф начальной частоты генератора;

$$F = 1 - \frac{1}{(2\pi R_s + L)\,[n + \beta^2 (1-n)]}, \quad L = 4l;$$

$\Delta u_E = \frac{R_s}{\beta^2 (1-n) E} \Delta E$, ΔE — дрейф энергии инжекции.

Изменения вышеуказанных параметров рассматриваются от цикла к циклу. На рис. 3 представлен частный случай: $R_1 < R_{\text{инф}}$, $R_s = \overline{R_s} > R_2$. Каждому положению мгновенной орбиты и соответствует область инфлектора $g_{\min}(u)$, вылетев из которой частицы не столкнутся с инфлектором. Если возвращать мгновенную орбиту электронов после того, как они совершат κ' оборотов, на прежнее место, то получим график функции $g_{\min}(u)$, нарисованный сплошной линией. Так как фактически мгновенная орбита двигается, то график функции $g_{\min}(u)$ изображается штриховой линией. Из рис. 3 видно, что область интегрирования по u равна $[(R_{\text{инф}} - R_1),\ u_1 - y]$, по y — $[\overline{R_s} - R_2, y_1]$, азимутальный размер сгустка: $(\varphi_{02} - \varphi_{01}) = (\varphi_2 - \varphi_1) \sqrt{1 - \left(\frac{R_s - R_2}{y_1}\right)}$.

Таким образом,

$$Q = \frac{I(\varphi_2 - \varphi_1)}{g_1 \left|\frac{dR}{dt}\right| \cdot y_1 \cdot 2\pi} \sqrt{1 - \left(\frac{R_s - R_2}{y_1}\right)^2} \int\limits_{R_s - R_2}^{y_1} \int\limits_{R_{\text{инф}} - R_1}^{u_1 + (R_{\text{инф}} - R_1) - y} \times \int\limits_0^{g_{\min}(u)} dg\,du\,dy. \tag{17}$$

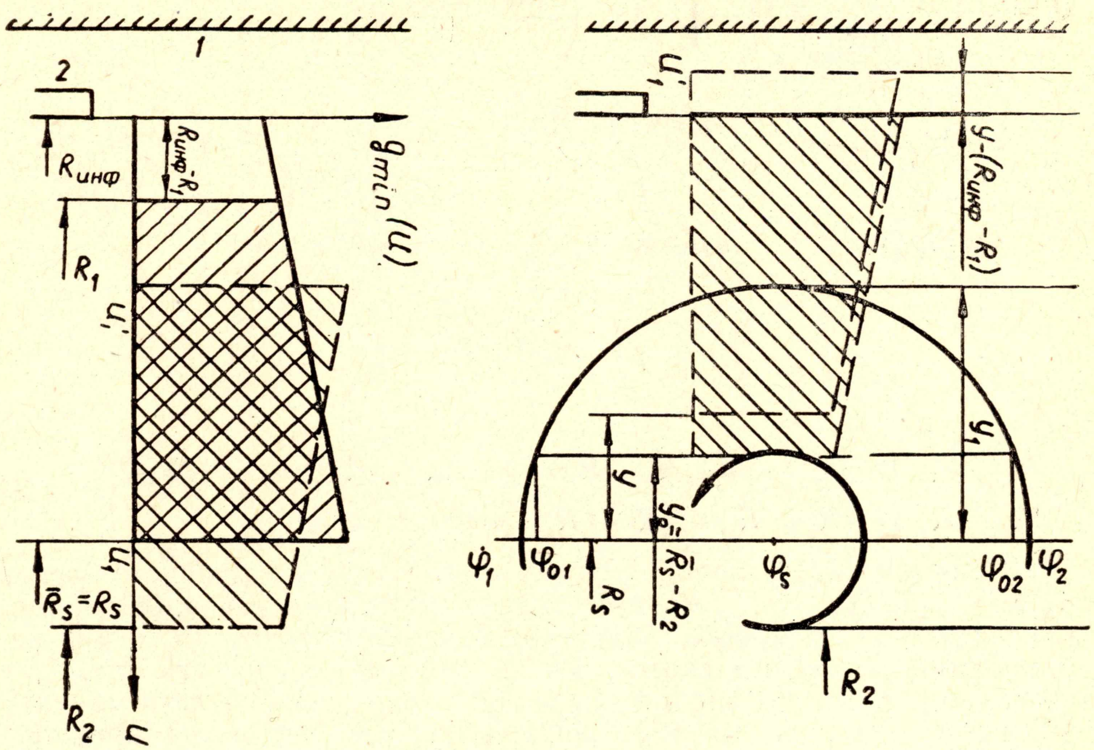

Рис. 3. К расстановке пределов интегрирования по u, y, φ_0 при неоптимальных условиях захвата

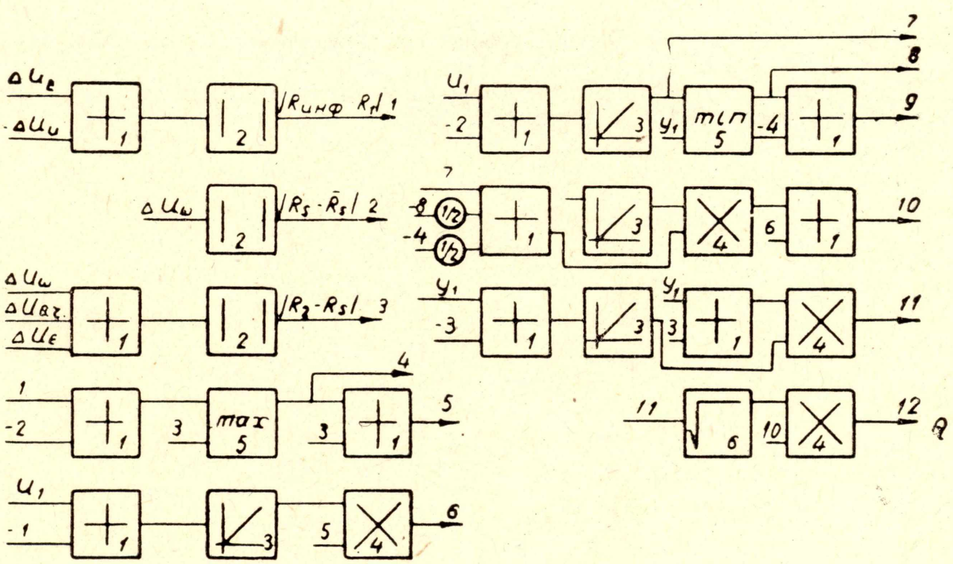

Рис. 4. Функциональная схема моделирования соотношений захвата (18) на АВМ (операции: 1 — суммирования, 2 — выделение модуля, 3 — сравнения с нулем, 4 — перемножения, 5 — сравнения двух величин, 6 — извлечения корня)

В общем случае зависимость захваченного заряда от вышеуказанных параметров имеет вид:

$$Q=\frac{I\cdot 2\,(1-\varphi_s\cdot\operatorname{ctg}\varphi_s)^{1/2}}{g_1\left|\frac{dR}{dt}\right|y_1\cdot\pi}\sqrt{1-\left(\frac{|R_s-R_2|}{y_1}\right)^2}\left(\int\limits_{|R_s-R_2|}^{|R_{\text{инф}}-R_1|-|R_s-\bar{R}_s|}\times\right.$$

$$\times\int\limits_{\{(R_1-R_{\text{инф}})\geqslant 0\}}^{u_1-\{(R_1-R_{\text{инф}})\geqslant 0\}}+\int\limits_{|R_{\text{инф}}-R_1|-|R_s-\bar{R}_s|}^{\min\left\{\begin{matrix}u_1-|R_s-\bar{R}_s|\\ y_1\end{matrix}\right.}\left.\int\limits_{\{(R_{\text{инф}}-R_1)\geqslant 0\}}^{u_1-(y+|R_s-\bar{R}_s)-\{(R_{\text{инф}}-R_1)\geqslant 0\}}\right)\times$$

$$\times\int\limits_0^{g_{\min}(u)}dg\,du\,dy, \qquad (18)$$

где:

$$\left.\begin{matrix}R_1-R_{\text{инф}}=\Delta u_E-\Delta u_{\text{и}},\ R_s-\bar{R}_s=\Delta u_{\omega},\ R_2-\bar{R}_s=\Delta u_E-\Delta u_{\text{ВЧ}}\\ |R_2-R_s|=|(R_s-\bar{R}_s)-(R_2-\bar{R}_s)|=|\Delta u_E-\Delta u_{\text{ВЧ}}|\end{matrix}\right\}. \qquad (19)$$

Подставляя (19) в (18), получим зависимость захваченного заряда от $\Delta u_{\text{ВЧ}}$, $\Delta u_{\text{и}}$, Δu_E, Δu_{ω}. Из (18) видно, что при неравномерном распределении захваченного заряда по u зависимость от $\Delta u_{\text{и}}$ и Δu_E несимметрична относительно нуля. Из (18) легко показать, что для компенсации дрейфа энергии инжекции желательно сделать моменты инжекции и включения ВЧ-поля связанными. На рис. 4 представлена блок-схема моделирования соотношения (18) при $g_{\min}(u)=g_1$.

ЛИТЕРАТУРА

1. М. С. Рабинович. Основы теории синхрофазотрона. Труды ФИАН СССР, т. 10, 1958.
2. И. С. Данилкин, М. С. Рабинович. Захват частиц в синхрофазотронный режим ускорения. ЖТФ, т. 28, вып. 2, 1958.