ИЗВЕСТИЯ
ТОМСКОГО ОРДЕНА ТРУДОВОГО КРАСНОГО ЗНАМЕНИ ПОЛИТЕХНИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА имени С. М. КИРОВА

Том 156 1969

ДВИЖЕНИЕ ЧАСТИЦ В ВОЛНОВОДНЫХ СИНХРОТРОНАХ (УЧЕТ НЕЛИНЕЙНЫХ ЧЛЕНОВ)

А. Н. ДИДЕНКО, В. К. КОНОНОВ

Ускоряющие системы на основе изогнутых замкнутых волноводов могут представлять определенный интерес для ускорительной техники [1, 2]. Отличительной особенностью ускорителей с такими ускоряющими системами является то, что в них ускоряющее поле имеет все компоненты, быстро изменяющиеся по радиусу и высоте волновода.

В работах [3, 4] было рассмотрено движение частиц в волноводных синхротронах в линейном приближении. Показано, что в таком приближении высокочастотное поле не приводит к перераспределению декрементов затухания. Однако необходимо отметить следующее: так как в волноводных синхротронах величиной, по которой ведется разложение, является $\varkappa\rho$, то линейная теория справедлива только для тех ρ, для которых выполняется соотношение $\varkappa\rho \ll 1$. Величина $\varkappa \sim \frac{1}{r_2 - r_1}$ (r_1 и r_2 — внутренний и внешний радиусы камеры), и поэтому линейная теория справедлива для отклонений, значительно меньших тех, для которых справедлива линейная теория колебания частиц в обычных синхротронах, в которых разложение ведется по $\frac{\rho}{r_0}$. Отсюда следует, что нелинейные члены в волноводных синхротронах должны оказывать более существенное влияние на движение частиц по сравнению с их влиянием в обычных синхротронах.

Данная работа посвящена исследованию влияния нелинейных членов на движение частиц в волноводных синхротронах. Для простоты вычислений будем предполагать, что для ускорения используются волны типа LE изогнутых замкнутых волноводов прямоугольного сечения ($E_z = 0$) с диафрагмами, расположенными по изогнутым стенам.

Записывая уравнения движения, можно убедиться, что в этом случае колебания по z не связаны с радиальными колебаниями. Поэтому рассмотрение удобнее начать именно с аксиальных колебаний. Ограничимся при разложении в ряд высокочастотного поля только квадратичными членами. Что касается разложения в ряд компонент внешнего магнитного поля, то будем считать, что для него по-прежнему достаточно ограничиться удержанием линейных членов. Без учета излучения для частиц, движущихся во внешнем магнитном поле при наличии высокочастотного поля LE— волны изогнутого замкнутого волновода прямоугольного сечения, существует следующий интеграл движения:

$$E\left(\frac{r^2\dot{\Theta}}{c^2}-\frac{q}{\omega}\right)+\frac{er}{c}\left(A_\Theta^{\text{в.ч}}+A_\Theta^{\text{вн}}\right)=\text{const},\tag{1}$$

где $A_\Theta^{\text{вн}}$ и $A_\Theta^{\text{в.ч}}$ — Θ-я компонента вектора-потенциала внешнего магнитного и высокочастотного полей,

q — кратность.

Наличие этого интеграла сильно упрощает решение нашей задачи. Ограничиваясь членами первого порядка при разложении $\dot{\Theta}$ в ряд, можно показать, что

$$\dot{\Theta}=\dot{\Theta}_s\left[1-\frac{\rho}{r_s}-\frac{E_{\Theta,s}^{\text{в.ч}}}{\kappa r_s H_z^{\text{вн}}}\psi\right],\tag{2}$$

где $E_{\Theta,s}^{\text{в.ч}}=E_{\Theta,\max}^{\text{в.ч}}\cos\varphi_s$.

Воспользовавшись этим выражением для $\dot{\Theta}$, уравнение движения частиц в волноводном синхротроне с учетом членов второго порядка малости можно записать в следующей форме:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{E}{c^2}\dot{z}\right)+\frac{E}{c^2}\dot{\Theta}_s^2 n_0 Az=-\frac{E}{c^2}\dot{\Theta}_s^2 n_0 z\left\{-B\frac{\rho}{r_s}+D\psi\right\},\tag{3}$$

где

$$A=1+\frac{\kappa_z^2 r_s^2}{\kappa r_s}\frac{1}{n_0}\frac{E_{\Theta,s}^{\text{в.ч}}}{H_z^{\text{вн}}}\operatorname{tg}\varphi_s,$$

$$B=\frac{\kappa_z^2 r_s^2}{n_0\kappa r_s}\frac{E_{\Theta,s}^{\text{в.ч}}}{H_z^{\text{вн}}}\operatorname{tg}\varphi_s,\tag{4}$$

$$D=A\frac{E_{\Theta,s}^{\text{в.ч}}}{\kappa r_s H_z^{\text{вн}}}+\frac{\kappa_z^2 r_s^2}{n_0\kappa r_s}\frac{E_{\Theta,s}^{\text{в.ч}}}{H_z^{\text{вн}}},$$

n_0 — показатель магнитного поля,

$$\kappa_z=\frac{\pi}{b},$$

b — высота волновода.

Так как справа стоят величины второго порядка, то вместо ρ и ψ можно подставить их значения, найденные из решения линейных уравнений.

Наличие члена $\sim\rho$ в правой части уравнения приводит только к перекачке энергии радиальных колебаний в аксиальные и поэтому не представляет большой опасности.

Большую опасность представляет член $\sim\psi$, который приводит к связи поперечных и продольных колебаний и в случае резонанса может привести к неограниченному возрастанию амплитуд поперечных колебаний. Поэтому и подробно исследуем влияние этого члена на аксиальные бетатронные колебания частиц. Уравнение (3) тогда будет иметь вид:

$$\frac{d}{dt}(m\dot{z})+\dot{\Theta}_s^2 m\left[n_0-\left(\frac{\kappa_z}{\kappa}\right)^2\frac{qeV_{\max}\sin\varphi_s}{2\pi E}\right]=$$

$$=m\dot{\Theta}_s^2\left(\frac{\kappa_z}{\kappa}\right)^2\frac{qeV_{\max}\sin\varphi_s}{2\pi E}z\psi.\tag{5}$$

Как известно [5,6], уравнения такого типа описывают воздействие внешних периодических сил на нелинейные колебательные системы с медленно меняющимися параметрами. В общем случае, который имеет место и у нас, частоты и амплитуды внешних сил будут медленно изменяться со временем.

Используя метод решения, подробно изложенный в [5], можно показать, что в первом приближении

$$Z = a\cos\left(\frac{1}{2}\int \nu d\psi\right), \tag{6}$$

где a и ψ должны удовлетворять уравнениям

$$\begin{aligned} \frac{da}{dt} &= -\frac{a}{2m\omega}\frac{d(m\omega)}{dt} + \dot{\Theta}_s^2\left(\frac{\kappa_z}{\kappa}\right)^2 \frac{qe\,V_{\max}\cos\varphi_s}{2\pi E}\, a\tilde{\psi}_0\frac{\sin 2\psi}{2\nu}, \\ \frac{d\psi}{dt} &= \omega - \frac{1}{2}\nu + \dot{\Theta}_s^2\left(\frac{\kappa_z}{\kappa}\right)^2\frac{qe\,V_{\max}\cos\varphi_s}{2\pi E}\tilde{\psi}_0\frac{\cos 2\psi}{2\nu}, \end{aligned} \tag{7}$$

ω и ν — частоты бетатронных и фазовых колебаний соответственно:

$$\omega = \dot{\Theta}_s\sqrt{n_0 - \left(\frac{\kappa_z}{\kappa}\right)^2\frac{qe\,V_{\max}\sin\varphi_s}{2\pi E}},$$

$$\nu = \dot{\Theta}_s\sqrt{\frac{qe\,V_{\max}\sin\varphi_s}{2\pi(1-n_0)E}}.$$

Введя новую переменную

$$a' = a e^{\frac{1}{2}\ln\left(\frac{m\omega}{m_{н}\omega_{н}}\right)},$$

систему уравнений (7) можно преобразовать к следующему виду:

$$\begin{aligned} \frac{da'}{d\tau} &= \dot{\Theta}_s\left(\frac{\kappa_z}{\kappa}\right)^2\tilde{\psi}_0\frac{qe\,V_{\max}\cos\varphi_s}{2\pi E}\, a'\frac{\sin 2\psi}{2\nu}, \\ \frac{d\psi}{d\tau} &= \omega - \frac{1}{2}\nu + \dot{\Theta}_s^2\left(\frac{\kappa_z}{\kappa}\right)^2\tilde{\psi}_0\frac{qe\,V_{\max}\cos\varphi_s}{2\pi E}\frac{\cos 2\psi}{2\nu}, \end{aligned} \tag{8}$$

где $\tau = \dot{\Theta}_s t$.

Из выражений (8) видно, что если в какой-то момент времени $\omega(t) = \frac{1}{2}\nu(t)$, то в этот момент будут выполняться условия резонанса между бетатронными и фазовыми колебаниями. Однако, так как частоты изменяются во времени, то увеличение амплитуды бетатронных колебаний при прохождении через резонанс будет зависеть от скорости изменения параметров. При определенной скорости изменения параметров системы наличие таких резонансов не будет оказывать существенного влияния на движение частиц в волноводных синхротронах.

На рис. 1—3 представлены результаты численного решения системы (8) для ускорителя со следующими параметрами:

$$n_0 = 0{,}6;\quad \left(\frac{\kappa_z}{\kappa}\right)^2 = 0{,}6;\quad r_s = 33\,см;\quad t_{обр} = 10^{-6}\,сек;$$

$$q = 500;\quad \lambda = 40\ см;\quad eV_{\max} = 5\cdot 10^5\ эв.$$

Эти параметры близки к тем, которые могут представлять практический интерес. Большая напряженность высокочастотного поля в первоначальный момент времени необходима для того, чтобы размеры сепаратрисы равнялись радиальным размерам камеры при высокой кратности. Зависимость энергии частиц от времени была выбрана в виде

$$E = E_0 \left(1 + \frac{\beta}{T_{\text{у к}}} t\right), \quad \beta = 100, \quad E_0 = 5 \cdot 10^7 \text{ эв}$$

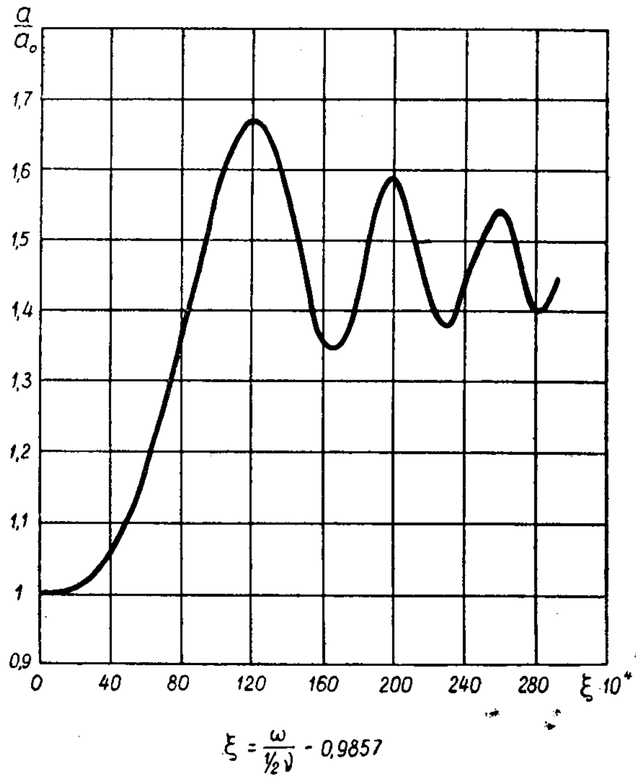

Рис. 1

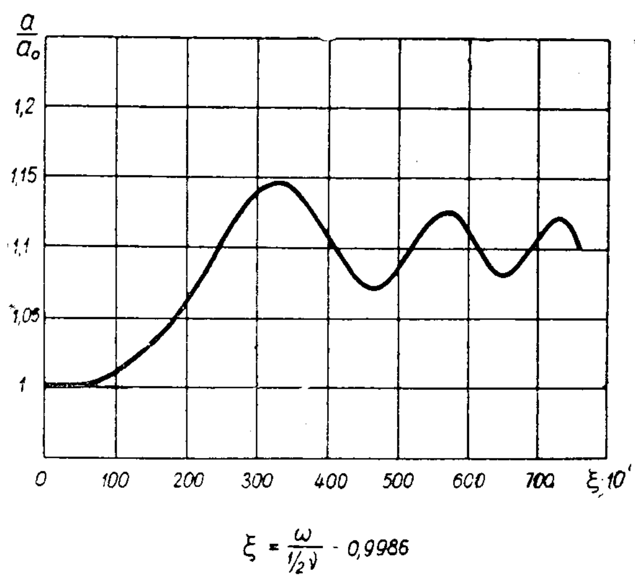

Рис. 2

и расчеты произведены для $T_{\text{уск}} = 0{,}01$ *сек*, 0,1 *сек* и 1 *сек* (рис. 1, 2 и 3 соответственно).

Из этих рисунков видно, что при прохождении через резонанс амплитуда бетатронных колебаний изменяется незначительно, если $T_{уск} = 1$ *сек* и будет сильно возрастать при уменьшении времени ускорения. Этот на первый взгляд неожиданный результат является следствием того, что при изменении времени ускорения мы одновременно меняем напряженность высокочастотного поля.

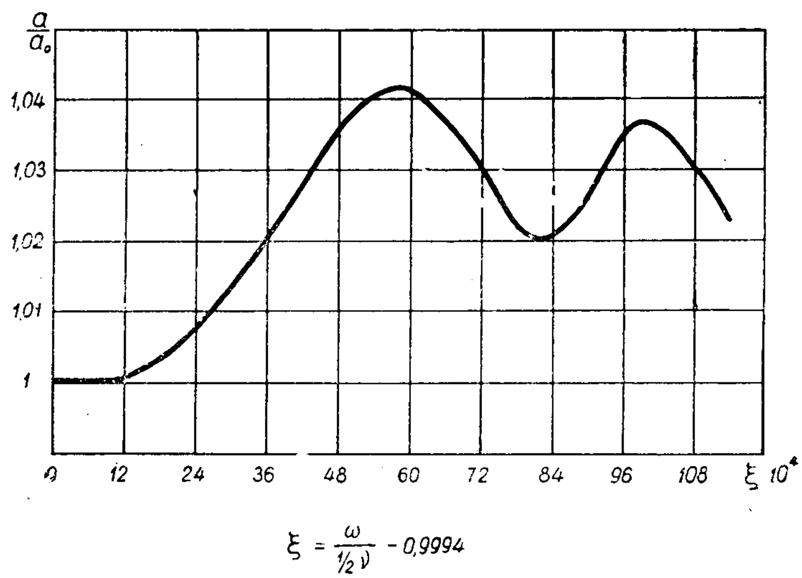

Рис. 3

Если же с изменением времени ускорение напряжения не изменять, то коэффициенты при $\sin 2\psi$ и $\cos 2\psi$ в уравнениях (8) будут оставаться постоянными и полученные в этом случае результаты будут свидетельствовать о том, что с увеличением скорости прохождения через резонанс возрастание амплитуд колебаний будет уменьшаться.

Аналогичным образом могут быть учтены нелинейные члены и для радиальных бетатронных колебаний. Полученное уравнение может быть также решено численными методами, и для него можно определить такие скорости прохождения через резонанс, при которых увеличение амплитуды будет незначительно.

Таким образом, из рассмотренного видно, что в волноводных синхротронах возможно появление дополнительных резонансов. При определенных скоростях прохождения через резонансы их влияние может стать несущественным.

ЛИТЕРАТУРА

1. А. А. Воробьев, А. Н. Диденко, Е. С. Коваленко, Б. Н. Морозов. Proc. Intern. Conf CERN, p. 680, 1959.
2. А. А. Воробьев и др. Волновидный синхротрон на 10 Мэв. Атомная энергия. 18, 6 (1965).
3. Е. С. Коваленко. Изв. высш. учебн. заведений, Физика. № 6, 85 (1959).
4. Е. С. Коваленко. Там же, № 3, 175 (1960).
5. Н. Н. Боголюбов, Ю. А. Митропольский. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. Москва, 1958.
6. Ю. А. Митропольский. Проблемы асимптотической теории нестационарных колебаний. Москва, 1964.