ИЗВЕСТИЯ
ТОМСКОГО ОРДЕНА ТРУДОВОГО КРАСНОГО ЗНАМЕНИ ПОЛИТЕХНИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА имени С. М. КИРОВА

Том 156 1969

ДВИЖЕНИЕ ПОЛЯРИЗОВАННОГО ЭЛЕКТРОНА, ОБЛАДАЮЩЕГО ВАКУУМНЫМ МАГНИТНЫМ МОМЕНТОМ В СКРЕЩЕННЫХ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ПОЛЯХ

В. Г. БАГРОВ, В. А. БОРДОВИЦЫН

В работе найдены новые точные решения уравнения Дирака для электрона в ортогональных постоянных и однородных электрическом и магнитном полях. Рассмотрен вакуумный магнитный момент электрона и поляризация электронного спина.

§ 1. Уравнение Дирака для электрона с аномальным магнитным моментом

Движение электрона во внешнем электромагнитном поле описывается уравнением Дирака

$$i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} = H\Psi, \tag{1}$$

$$H = c\rho_1 (\vec{\sigma}\vec{P}) + \rho_3 mc^2 - e\varphi, \tag{2}$$

где σ, ρ — матрицы Дирака,

$\vec{P} = -i\hbar\nabla + \frac{e}{c} A$ — кинетический импульс,

m — масса покоя электрона,

e — положительный элементарный заряд,

$\vec{A}$ и φ — потенциалы внешнего электромагнитного поля,

c — скорость света.

Как показал Паули [1], гамильтониан (2) можно обобщить таким образом, что можно учесть наличие аномального магнитного момента у электрона. Обобщенный гамильтониан в этом случае имеет вид:

$$H = c\rho_1 (\vec{\sigma}\vec{P}) + \rho_3 mc^2 - e\varphi + c\hbar\mu\, [\rho_3 (\vec{\sigma}\vec{H}) + \rho_2 (\vec{\sigma}\vec{E})]. \tag{3}$$

Здесь

$c\hbar\mu$ — аномальная (вакуумная) часть момента электрона,

$\vec{H} = rot\,\vec{A}$ и $\vec{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \nabla\varphi$ — внешнее магнитное и электрическое поля. Очевидно, гамильтониан (2) получается из (3) в частном случае $\mu = 0$.

Рассмотрим движение электрона в постоянных и однородных ортогональных электрическом и магнитном полях, причем будем считать $E \leqslant H$.

Выберем систему координат так, что ось z направлена вдоль магнитного поля, ось y — вдоль вектора электрического поля. В соответствии с нашим условием $E \leqslant H$ положим $E = H \sin\eta$, где η — некоторый угол $\left(-\frac{\pi}{2} \leqslant \eta \leqslant \frac{\pi}{2}\right)$.

Потенциалы электромагнитного поля удобно выбрать в следующем виде:

$$A_x = -yH,\ A_y = A_z = 0,\ \varphi = -yH\sin\eta.$$

Легко видеть, что в этом случае гамильтониан (2) и (3) не зависит от времени, и можно искать стационарное решение уравнения (1). Можно также установить, что операторы $P_3 = -i\hbar\frac{\partial}{\partial z}$ и $p_1 = -i\hbar\frac{\partial}{\partial x}$ коммутируют с гамильтонианом (2) и (3) и друг с другом и, следовательно, являются интегралами движения. Таким образом, стационарное решение уравнения (1) можно подчинить двум дополнительным уравнениям

$$P_3\Psi = \hbar\kappa_3\Psi,\ p_1\Psi = \hbar\kappa_1\Psi. \tag{4}$$

С учетом уравнений (4) стационарное решение (1) запишется в виде

$$\Psi = L^{-1}\exp\{-icKt + i\kappa_1 x + i\kappa_3 z\}\,\psi(t),$$

$$t = q\left(y - \frac{\kappa_2}{\gamma}\right),\ \gamma = \frac{eH}{c\hbar}. \tag{5}$$

Здесь

q и κ_2 — неизвестные пока постоянные,

величина K связана с энергией $\varepsilon = c\hbar K$ электрона.

Спинор $\psi(t)$ удовлетворяет следующей системе уравнений:

$$\begin{gathered}
\left[K - \kappa_0 - \mu H - \left(\kappa_2 + \frac{\gamma t}{q}\right)\sin\eta\right]\psi_1 - \\
-\left(\kappa_1 - \kappa_2 - \mu H\sin\eta - \frac{\gamma t}{q} - q\frac{d}{dt}\right)\psi_4 - \kappa_3\psi_3 = 0, \\
\left[K - \kappa_0 + \mu H - \left(\kappa_2 + \frac{\gamma t}{q}\right)\sin\eta\right]\psi_2 - \\
-\left(\kappa_1 - \kappa_2 + \mu H\sin\eta - \frac{\gamma t}{q} + q\frac{d}{dt}\right)\psi_3 + \kappa_3\psi_4 = 0, \\
\left[K - \kappa_0 + \mu H - \left(\kappa_2 + \frac{\gamma t}{q}\right)\sin\eta\right]\psi_3 - \\
-\left(\kappa_1 - \kappa_2 + \mu H\sin\eta - \frac{\gamma t}{q} - q\frac{d}{dt}\right)\psi_2 - \kappa_3\psi_1 = 0, \\
\left[K + \kappa_0 - \mu H - \left(\kappa_2 + \frac{\gamma t}{q}\right)\sin\eta\right]\psi_4 - \\
-\left(\kappa_1 - \kappa_2 - \mu H\sin\eta - \frac{\gamma t}{q} + q\frac{d}{dt}\right)\psi_1 + \kappa_3\psi_2 = 0,
\end{gathered} \tag{6}$$

где $\kappa_0 = \frac{mc}{\hbar}$.

Решение системы (6) существенно различно при $|\sin\eta| < 1$ и при $|\sin\eta| = 1$ $\left(\eta = \pm\frac{\pi}{2}\right)$.

§ 2. Решение уравнения Дирака для неравных полей

Рассмотрим случай $|\sin\eta| < 1$. В этом случае решение уравнений (6) можно в принципе получить преобразованием Лорентца решения уравнения Дирака для чисто магнитного поля ($\eta = 0$). Такое решение известно [2]. Легко убедиться, что в случае $|\sin\eta| < 1$ решение системы (6) следует искать в виде:

$$\psi_i = \alpha_i U_n(t) + \beta_i U_{n-1}(t), \quad i = 1, 2, 3, 4. \tag{7}$$

Здесь α_i и β_i — некоторые постоянные.

Функции Эрмита $U_n(t)$ связаны с полиномами Эрмита $H_n(t)$ следующим соотношением:

$$U_n(t) = \frac{1}{\sqrt{2^n n!}} \sqrt[4]{\frac{q^2}{\pi}}\, e^{-\frac{t^2}{2}} H_n(t)$$

и удовлетворяют функциональным уравнениям

$$U_n' = \sqrt{2n}\, U_{n-1} - tU_n, \quad U_{n-1}' = tU_{n-1} - \sqrt{2n}\, U_n. \tag{8}$$

Подставляя выражения (7) в систему (6) и используя соотношения (8), приравняем нулю коэффициенты в уравнениях при U_n, U_{n-1}, tU_n, tU_{n-1}. Получим всего шестнадцать однородных линейных уравнений относительно восьми неизвестных α_i и β_i. Решая эти уравнения, придем к выводу, что решение возможно, если

$$q = \sqrt{\gamma\cos\eta}, \quad \kappa_2 = \frac{\kappa_1 - K\sin\eta}{\cos^2\eta},$$

откуда следует в силу (5)

$$t = \sqrt{\gamma\cos\eta}\left(y + \frac{K\sin\eta - \kappa_1}{\cos^2\eta}\right). \tag{9}$$

Величины α_i и β_i имеют при этом вид:

$$\begin{aligned} &\alpha_1 = c_4\sin\frac{\eta}{2}, \quad \alpha_2 = c_2\cos\frac{\eta}{2}, \quad \alpha_3 = c_2\sin\frac{\eta}{2}, \quad \alpha_4 = c_4\cos\frac{\eta}{2}; \\ &\beta_1 = c_1\cos\frac{\eta}{2}, \quad \beta_2 = c_3\sin\frac{\eta}{2}, \quad \beta_3 = c_3\cos\frac{\eta}{2}, \quad \beta_4 = c_1\sin\frac{\eta}{2}. \end{aligned} \tag{10}$$

Постоянные c_i удовлетворяют следующей системе уравнений;

$$\begin{aligned} &(d - \kappa_0 - \mu H\cos\eta)\, c_1 + \sqrt{2\gamma n\cos\eta}\, c_4 - \kappa_3 c_3 = 0, \\ &(d - \kappa_0 + \mu H\cos\eta)\, c_2 + \sqrt{2\gamma n\cos\eta}\, c_3 + \kappa_3 c_4 = 0, \\ &(d + \kappa_0 + \mu H\cos\eta)\, c_3 + \sqrt{2\gamma n\cos\eta}\, c_2 - \kappa_3 c_1 = 0, \\ &(d + \kappa_0 - \mu H\cos\eta)\, c_4 + \sqrt{2\gamma n\cos\eta}\, c_1 + \kappa_3 c_2 = 0, \end{aligned} \tag{11}$$

$$d = \frac{K - \kappa_1\sin\eta}{\cos\eta}.$$

Для того, чтобы функция (5) была нормирована на единицу, необходимо выполнение соотношения

$$\sum_{i=1}^{4} |c_i|^2 = 1. \tag{12}$$

Условием разрешимости уравнений (11) является равенство нулю определителя системы. Отсюда получаем уровни энергии электрона

$$K = \kappa_1 \sin\eta + \cos\eta \sqrt{\kappa_3^2 + (\sqrt{\kappa_0^2 + 2\gamma h \cos\eta} + \zeta\mu H \cos\eta)^2}.$$

Здесь $\zeta = \pm 1$. Величину ζ мы впоследствии свяжем с ориентацией спина электрона. Таким образом, учет аномального магнитного момента снимает вырождение по спину.

Если в (11) положить $\mu = 0$ (не учитывать аномальный магнитный момент электрона), то вместе с определителем системы обращаются в нуль все определители третьего порядка, и уравнения (11) даже при условии (12) не имеют единственного решения. Это связано с тем, что наряду с уравнениями (4) волновую функцию можно подчинить дополнительному уравнению (описывающему ориентацию спина электрона). В случае $\mu \neq 0$ система (11) при условии (12) имеет единственное решение, однако, как мы увидим ниже, и в этом случае волновую функцию можно подчинить дополнительному спиновому уравнению.

§ 3. Решение уравнения Дирака для равных по величине полей

Уравнения (6) допускают точное решение и в случае $E = H$ $\left(\eta = \frac{\pi}{2}\right)$. Этот случай не может быть получен преобразованием Лорентца из чисто магнитного поля. Оказывается, спектр энергии электрона является в отличие от случая $E < H$ непрерывным. Решение уравнений (6) в этом случае следует искать в виде

$$\psi_i = Q\,[\alpha_i \Phi(t) + \beta_i \Phi'(t)], \tag{13}$$

где α_i и β_i — постоянные числа,

Q — некоторый нормировочный множитель,

$\Phi(t)$ и $\Phi'(t)$ — функция Эйри и ее производная [3],

$$\Phi(t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\left(\frac{x^3}{3} + tx\right)} dx. \tag{14}$$

Функция Эйри удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$\Phi'' - t\Phi = 0. \tag{15}$$

Подставляя выражения (13) в (6) при условии $\eta = \frac{\pi}{2}$ и приравнивая нулю коэффициенты при Φ, Φ', $t\Phi$, $t\Phi'$, получим снова шестнадцать уравнений для восьми величин α_i и β_i, которые имеют решение при условии

$$q = \sqrt[3]{2\gamma(K - \kappa_1)},$$

$$K = \kappa_2 + \zeta\mu H + \sqrt{\kappa_0^2 + \kappa_3^2 + (\kappa_2 + \zeta\mu H - \kappa_1)^2}.$$

В этом случае из (5) следует

$$t = \sqrt[3]{2\gamma(K - \kappa_1)}\left(y - \frac{\kappa_2}{\gamma}\right).$$

Здесь $\zeta = \pm 1$ связано, как выяснится далее, с ориентацией спина электрона (следовательно, при $\mu \neq 0$ и здесь вырождение по спину снимается). Квазиимпульс κ_2 можно рассматривать здесь как новое квантовое число. Знак перед корнем в выражении для энергии K выбран из условия, что функции (13) должны убывать в сторону положительного направления оси y (электрон движения против электрического поля!). Как известно, при больших положительных t функция Эйри и ее производная быстро убывают [3].

Решение уравнений для α_i и β_i при таких условиях имеет вид:

$$
\begin{aligned}
\alpha_1 &= A(K - \kappa_1 + \kappa_0) + B\kappa_3, \\
\alpha_2 &= A\kappa_3 - B(K - \kappa_1 + \kappa_0), \\
\alpha_3 &= A\kappa_3 + B(K - \kappa_1 - \kappa_0), \\
\alpha_4 &= -A(K - \kappa_1 + \kappa_0) + B\kappa_3, \\
\beta_1 &= \beta_4 = \sqrt[3]{2\gamma(K - \kappa_1)}\, A, \\
\beta_2 &= \beta_3 = \sqrt[3]{2\gamma(K - \kappa_1)}\, B.
\end{aligned}
\tag{16}
$$

Величины A и B можно подчинить условию

$$
AA^+ + BB^+ = 1, \tag{17}
$$

а нормировку учтем множителем Q в формуле (13). Если $\mu = 0$, то коэффициенты A и B даже при условии (17) не определяются однозначно из уравнений Дирака и требуют для своего определения дополнительного спинового уравнения. Если $\mu \neq 0$, то для A и B получаются при условии (17) значения

$$
A = \frac{1 + \zeta}{2}, \quad B = \frac{1 - \zeta}{2}. \tag{18}
$$

Проведем нормировку волновых функций (13). В состояниях непрерывного спектра нормировку можно произвести либо на $\delta(K - K')$, либо на $\delta(\kappa_2 - \kappa_2')$. Нормировка функций (13) может быть найдена следующим образом.

Составляем выражение

$$
I(\varkappa) = \int e^{\varkappa y} \sum_{i=1}^{4} \psi_i^{+'}(t)\, \psi_i(t)\, dy,
$$

где штрих при ψ_i означает другое состояние (K'), $\varkappa$ — некоторая положительная константа. Затем вычисляем этот интеграл и требуем, чтобы при $\varkappa \to 0$ функция $I(\varkappa) \to \delta(K - K')$. Выражение $I(\varkappa)$ можно вычислить, воспользовавшись следующим интегралом

$$
J(\mu, \nu;\ \mu', \nu';\ \varkappa) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{\varkappa y}\, \Phi(\mu y - \nu)\, \Phi(\mu' y - \nu')\, dy,
$$

который можно вычислить с помощью искусственного приема. Функцию $\Phi(\mu' y - \nu')$ заменим интегральным представлением (14) и меняем порядок интегрирования. Используя далее известный интеграл

$$
\int_{-\infty}^{\infty} e^{\alpha x}\, \Phi(x)\, dx = \sqrt{\pi}\, e^{\frac{\alpha^3}{3}},
$$

можно окончательно получить интеграл $J(\mu, \nu; \mu', \nu'; \varkappa)$ в следующем виде:

$$J(\mu, \nu; \mu', \nu'; \varkappa) = \frac{\sqrt{\pi}}{|\mu^3 - \mu'^3|^{1/3}} e^s \Phi(M),$$

$$S = \varkappa \frac{\mu^2 \nu - \mu'^2 \nu'}{\mu^3 - \mu'^3} + \frac{\varkappa^3}{3} \frac{\mu^3 + \mu'^3}{(\mu^3 - \mu'^3)^3},$$

$$M = \frac{(\mu' \nu - \mu \nu')(\mu^3 - \mu'^3) + \mu\mu' \varkappa^2}{(\mu^3 - \mu'^3)^{4/3}}.$$

После этого вычисление $I(\varkappa)$ не представляет существенных трудностей. Зная интеграл $I(\varkappa)$, можно получить нормировочный множитель Q (и попутно доказать ортогональность функций (13)).

$Q = [2\pi (K - \kappa_1) \sqrt[3]{2\gamma (K - \kappa_1)}]^{-1/2}$ при нормировке на $\delta (K - K')$,

$Q = [2\pi (K - \kappa_2) \sqrt[3]{2\gamma (K - \kappa_1)}]^{-1/2}$ при нормировке на $\delta (\kappa_2 - \kappa_2')$.

Отметим, что решение уравнения Шредингера для скрещенных полей (см. [4] стр. 146) при любом соотношении между E и H приводит к дискретному спектру. Такая ситуация свидетельствует о том, что случай $E = H$, $E \perp H$ не имеет удовлетворительного нерелятивистского приближения. Это тем более удивительно, что случай чисто электрического поля имеет разумное нерелятивистское приближение (см. [3], движение в однородном поле), тогда как уравнение Дирака для чисто электрического поля вообще не имеет корректных решений. Таким образом, полученное новое точное корректное решение уравнения Дирака представляет несомненный физический интерес.

§ 4. Поляризация спина электрона

Как известно, электрон обладает четырьмя степенями свободы. Следовательно, наряду с уравнениями (1) и (4) волновая функция может удовлетворять еще одному дополнительному уравнению, описывающему ориентацию спина электрона. Существует два типа ковариантных спиновых операторов, являющихся интегралами движения в нашем случае.

Легко установить, что оператор

$$T = (\boldsymbol{\sigma P}) \sin \varphi + T_3 \cos \varphi - T_1 \sin \eta \sin \varphi, \quad \boldsymbol{T} = mc \rho_3 \boldsymbol{\sigma} + \rho_1 \boldsymbol{P},$$

являющийся сверткой четырехмерного вектор-оператора спина [5] с некоторым постоянным 4-вектором (φ — произвольная постоянная фаза), коммутирует с гамильтонианом (2) при $\mu = 0$, а также с операторами (4) и, следовательно, является дополнительным спиновым интегралом движения. Точно так же можно обнаружить, что оператор

$$L = M_2 \sin \varphi \sin \eta + M_3 \cos \varphi + \varepsilon_2 \cos \varphi \sin \eta - \varepsilon_3 \sin \varphi,$$

$$\boldsymbol{M} = mc \boldsymbol{\sigma} + \rho_2 (\boldsymbol{\sigma P}) + \hbar\mu \{\boldsymbol{H} - (\boldsymbol{\sigma E})\}, \quad \boldsymbol{\varepsilon} = -\rho_3 (\boldsymbol{\sigma P}),$$

являющийся сверткой четырехмерного тензора спина второго ранга [5] с некоторым постоянным тензором (φ — снова некоторая произвольная фаза), коммутирует с гамильтонианом (2) при $\mu = 0$ и с операторами (4), т. е. также является спиновым интегралом движения. Таким образом, при $\mu = 0$ имеются два оператора спина. Однако они не коммутируют друг с другом, и, следовательно, для описания спиновых состояний нужно выбрать лишь один из них.

При $\mu \neq 0$ оператор T перестает быть интегралом движения. Оператор L остается интегралом движения лишь при $\varphi = 0$. Таким образом, наличие аномального магнитного момента резко ограничивает выбор возможных спиновых операторов.

Рассмотрим сначала случай неравных полей ($|\sin\eta| < 1$). Подчиняя волновую функцию уравнению ($\mu = 0$),

$$T\Psi = \zeta \hbar \lambda \Psi \quad (\zeta = \pm 1), \tag{19}$$

для коэффициентов c_i получим дополнительно к (11) систему уравнений:

$$\begin{aligned}
&(\kappa_0 \cos\varphi - \zeta\lambda) c_4 + [(d - \kappa_0)\cos\eta \sin\varphi + \kappa_3 \cos\varphi] c_2 = 0,\\
&[(d + \kappa_0)\cos\eta \sin\varphi + \kappa_3 \cos\varphi] c_4 - (\kappa_0 \cos\varphi + \zeta\lambda) c_2 = 0.\\
&(\kappa_0 \cos\varphi - \zeta\lambda) c_1 + [(d + \kappa_0)\cos\eta \sin\varphi + \kappa_3 \cos\varphi] c_3 = 0,\\
&[(d - \kappa_0)\cos\eta \sin\varphi + \kappa_3 \cos\varphi] c_1 - (\kappa_0 \cos\varphi + \zeta\lambda) c_3 = 0.
\end{aligned} \tag{20}$$

Из условия разрешимости системы (20) получаем

$$\lambda = \sqrt{\kappa_0^2 (\cos^2\varphi + \cos^2\eta \sin^2\varphi) + [(K - \kappa_1 \sin\eta) + \kappa_3 \cos\eta]^2}.$$

Совместно решая (20) и (11), получим с учетом (12) следующий вид коэффициентов c_i:

$$c_1 = A\sqrt{\frac{1}{2}\left(1 + \frac{\kappa_0}{d}\right)},$$

$$c_2 = B\sqrt{\frac{1}{2}\left(1 + \frac{\kappa_0}{d}\right)},$$

$$c_3 = \frac{-\sqrt{2\gamma n \cos\eta}\, B + \kappa_3 A}{\sqrt{2d(\kappa_0 + d)}},$$

$$c_4 = -\frac{\sqrt{2\gamma n \cos\eta}\, A + \kappa_3 B}{\sqrt{2d(\kappa_0 + d)}},$$

$$A = \delta\sqrt{\frac{1}{2}(1 + \zeta q)},$$

$$B = -\zeta\sqrt{\frac{1}{2}(1 - \zeta q)},$$

$$q = \frac{(d + \kappa_0)(\kappa_3 \cos\eta \sin\varphi + \kappa_0 \cos\varphi) + \kappa_3^2 \cos\varphi}{\lambda(d + \kappa_0)},$$

$$\delta = \frac{(d + \kappa_0)\cos\eta \sin\varphi + \kappa_3 \cos\varphi}{|(d + \kappa_0)\cos\eta \sin\varphi + \kappa_3 \cos\varphi|}.$$

Подчиняя волновую функцию уравнению ($\mu = 0$)

$$L\Psi = \zeta\hbar\lambda\Psi \quad (\zeta = \pm 1), \tag{22}$$

для коэффициентов c_i дополнительно к (11) получим

$$\begin{aligned}
&(d \cos\varphi \cos\eta - \zeta\lambda + i\kappa_3 \cos\eta \sin\varphi) c_4 +\\
&+ [i(d - \kappa_0 \cos\eta \sin\varphi + \kappa_3 \cos\eta \cos\varphi] c_2 = 0,\\
&[i(d + \kappa_0)\cos\eta \sin\varphi + \kappa_3 \cos\eta \cos\varphi] c_4 +
\end{aligned}$$

$$+\left(d\cos\eta\cos\varphi+\varsigma\lambda+i\kappa_3\cos\eta\sin\varphi\right)c_2=0,$$
$$\left(d\cos\eta\cos\varphi-\varsigma\lambda-i\kappa_3\cos\eta\sin\varphi\right)c_1+ \tag{23}$$
$$+\left[i\left(d+\kappa_0\right)\cos\eta\sin\varphi-\kappa_3\cos\eta\cos\varphi\right]c_3=0,$$
$$\left[i\left(d-\kappa_0\right)\cos\eta\sin\varphi-\kappa_3\cos\eta\cos\varphi\right]c_1+$$
$$+\left(d\cos\eta\cos\varphi+\varsigma\lambda-i\kappa_3\cos\eta\sin\varphi\right)c_3=0.$$

Из равенства нулю определителя системы (23) имеем

$$\lambda=\sqrt{(K-\kappa_1\sin\eta)^2-\cos^2\eta\left(\kappa_3^2+\kappa_0^2\sin^2\varphi\right)}.$$

Совместное решение (23) и (11) приводит к результату:

$$c_1=\frac{\varsigma}{2}\sqrt{\frac{1}{2}\left(1+\varsigma\frac{\kappa_0}{\lambda_0}\cos\varphi\right)}\left(\sqrt{1+\frac{\kappa_3}{d}}\,e^{-i\frac{\varphi-\varsigma\Phi}{2}}+\varsigma\sqrt{1-\frac{\kappa_3}{d}}\,e^{i\frac{\varphi-\varsigma\Phi}{2}}\right),$$
$$c_2=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}\left(1-\varsigma\frac{\kappa_0}{\lambda_0}\cos\varphi\right)}\left(\sqrt{1+\frac{\kappa_3}{d}}\,e^{i\frac{\varphi+\varsigma\Phi}{2}}-\varsigma\sqrt{1-\frac{\kappa_3}{d}}\,e^{-i\frac{\varphi+\varsigma\Phi}{2}}\right),$$
$$c_3=\frac{\varsigma}{2}\sqrt{\frac{1}{2}\left(1+\varsigma\frac{\kappa_0}{\lambda_0}\cos\varphi\right)}\left(\sqrt{1+\frac{\kappa_3}{d}}\,e^{-i\frac{\varphi-\varsigma\Phi}{2}}-\varsigma\sqrt{1-\frac{\kappa_3}{d}}\,e^{i\frac{\varphi-\varsigma\Phi}{2}}\right), \tag{24}$$
$$c_4=-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}\left(1-\varsigma\frac{\kappa_0}{\lambda_0}\cos\varphi\right)}\left(\sqrt{1+\frac{\kappa_3}{d}}\,e^{i\frac{\varphi+\varsigma\Phi}{2}}+\right.$$
$$\left.+\varsigma\sqrt{1-\frac{\kappa_3}{d}}\,e^{-i\frac{\varphi+\varsigma\Phi}{2}}\right),$$

где обозначено

$$\lambda_0=\sqrt{\kappa_0^2\cos^2\varphi+2\gamma n\cos\eta},$$

и угол Φ определяется соотношением:

$$\sin\Phi=\frac{\kappa_0\sin\varphi}{\sqrt{\kappa_0^2+2\gamma n\cos\eta}}.$$

При учете аномального магнитного момента электрона формулы (24) сохраняют свой вид, если в них положить $\varphi=\Phi=0$.

Проводя аналогичные вычисления для случая равных по величине полей, получаем для оператора T (при $\mu=0$) прежнее значение λ (19), (20) при условии $\eta=\frac{\pi}{2}$ и следующие коэффициенты A и B:

$$A=\varsigma\sqrt{\frac{1}{2}\left(1+\varsigma\frac{\kappa_0}{\lambda}\cos\varphi\right)},$$
$$B=\delta\sqrt{\frac{1}{2}\left(1-\varsigma\frac{\kappa_0}{\lambda}\cos\varphi\right)},$$
$$\delta=\frac{(K-\kappa_1)\sin\varphi+\kappa_3\cos\varphi}{|(K-\kappa_1)\sin\varphi+\kappa_3\cos\varphi|}.$$

Для оператора L (22) в случае $\mu=0$ имеем

$$A=i\sqrt{\frac{1+\varsigma\cos\varphi}{2}},\quad B=\varsigma\sqrt{\frac{1-\varsigma\cos\varphi}{2}}.$$

Для $\mu \neq 0$ A и B определены формулами (18). Таким образом, задача об отыскании решений уравнения Дирака для поляризованного электрона, движущегося в скрещенных полях, полностью решена.

Мы видим, что учет ориентации спина электрона позволяет однозначно определить спиновые коэффициенты в волновой функции. Наличие аномального магнитного момента электрона резко ограничивает выбор возможных спиновых операторов и приводит к снятию спинового вырождения.

ЛИТЕРАТУРА

1. W. Pauli. Rev. of Mod. Phys. 13, 203, 1941.
2. А. И. Ахиезер, В. Б. Берестецкий. Квантовая электродинамика. Физматгиз, 1959.
3. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц. Квантовая механика. Физматгиз, 1963.
4. И. И. Гольдман, В. Д. Кривченков. Сборник задач по квантовой механике. ГИТТЛ, 1967.
5. И. М. Тернов, В. Г. Багров, В. А. Бордовицын. Изв. высш. уч. зав., «Физика», № 4, 41, 1967.