ИЗВЕСТИЯ
ТОМСКОГО ОРДЕНА ТРУДОВОГО КРАСНОГО ЗНАМЕНИ ПОЛИТЕХНИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА имени С. М. КИРОВА

Том 157 1970 г.

О ГЛАВНЫХ НАПРАВЛЕНИЯХ НАПРЯЖЕНИЙ И ДЕФОМАЦИЙ

Г. А. ДОЩИНСКИЙ

(Представлена научным семинаром кафедры сопротивления материалов)

Одним из положений теории малых упруго-пластических деформаций является предположение о совпадении главных осей тензоров напряжений и деформаций. Это положение различно трактуется в учебной и научной литературе. В одних случаях оно рассматривается как необходимая исходная гипотеза, в других — как приближенное следствие экспериментальных наблюдений; чаще всего это положение приводится вообще без каких-либо обоснований. В то же время можно показать, что совпадение главных направлений для напряжений и деформаций (в частности, для условий простого нагружения изотропного тела) является проявлением известной физической закономерности, определяющей условия естественного протекания равновесного процесса, а именно, что совпадение главных напряжений и деформаций является необходимым условием минимума работы процесса упруго-пластической деформации.

Как известно из теории деформаций, деформированное состояние элемента может быть определено тремя взаимно ортогональными главными компонентами деформации: e_1, e_2, e_3. Точно также напряженное состояние определяется тремя главными напряжениями: σ_1, σ_2, σ_3.

Соотношения между напряжениями в различных площадках, а также соотношения между компонентами деформации в различных направлениях не зависят от свойства материалов, а всецело определяются статикой или геометрией.

Для некоторого состояния тела, претерпевающего деформацию и характеризуемого значением параметра нагружения λ, выделим элементарный кубик с гранями, перпендикулярными главным направлениям деформации в этом состоянии. Совместим направление de_1 с осью x, de_2 — с осью y, de_3 — с осью z. Допустим, что в этот произвольно взятый момент направления главных напряжений не совпадают с главными направлениями деформации и повернутые оси σ_1, σ_2, σ_3 образуют с осью x углы, косинусы которых соответственно равны: α_1, β_1, γ_1; с осью y — α_2, β_2, γ_2; с осью z — α_3, β_3, γ_3 (рис. 1). Тогда по граням указанного кубика можно показать напряжения:

$$\sigma_x = \sigma_1 \cdot \alpha_1^2 + \sigma_2 \cdot \beta_1^2 + \sigma_3 \cdot \gamma_1^2,$$
$$\sigma_y = \sigma_1 \cdot \alpha_2^2 + \sigma_2 \cdot \beta_2^2 + \sigma_3 \cdot \gamma_2^2,$$
$$\sigma_z = \sigma_1 \cdot \alpha_3^2 + \sigma_2 \cdot \beta_3^2 + \sigma_3 \cdot \gamma_3^2.$$

Кроме того, по граням будут и касательные напряжения, но так как грани кубика перпендикулярны главным направлениям деформации на данной стадии и, следовательно, не перекашиваются, то приращение работы деформации определится лишь выражением

$$dA = \sigma_x \cdot de_1 + \sigma_y \cdot de_2 + \sigma_z \cdot de_3.$$

Работа деформации при изменении параметра нагружения от 0 до λ

$$A = \int_0^\lambda [\sigma_1 \cdot \alpha_1^2 + \sigma_2 \cdot \beta_1^2 + \sigma_3 \gamma_1^2]\, e_1' + (\sigma_1 \cdot \alpha_2^2 + \sigma_2 \cdot \beta_2^2 + \sigma_3 \cdot \gamma_2^2)\, e_2' +$$
$$+ (\sigma_1 \cdot \alpha_3^2 + \sigma_2 \cdot \beta_3^2 + \sigma_3 \cdot \gamma_3^2)\, e_3'] \, d\lambda,$$

где все входящие величины предполагаются монотонно изменяющимися с изменением параметра нагружения λ.

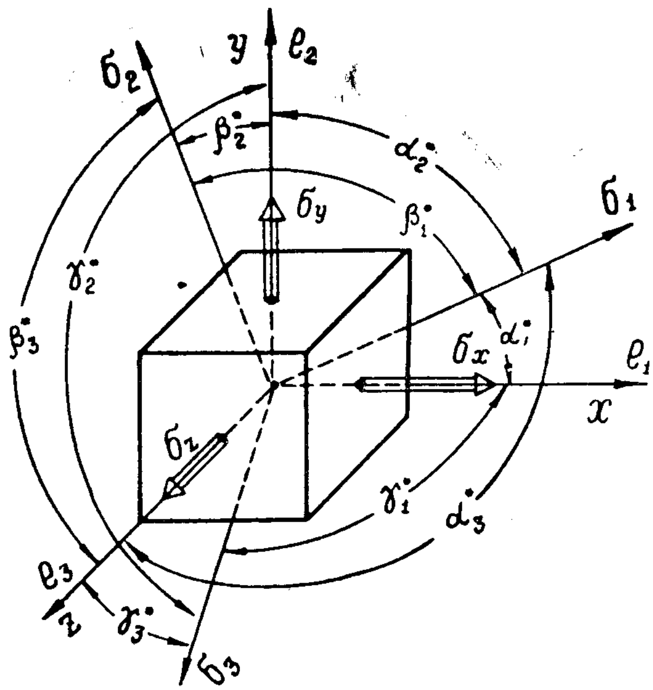

Рис. 1. $\alpha_1^* = \arccos \alpha_1$, $\beta_1^* = \text{ars} \cos \beta_1$, ... $\gamma_3^* = \arccos \gamma_3$,

Косинусы углов, определяющих взаимную ориентацию осей главных напряжений и деформаций, будут связаны между собой определенными соотношениями. Поэтому приходим к следующей задаче вариационного исчисления — определить функции:

$$u_1(\lambda), \quad u_2(\lambda), \; .... \; u_n(\lambda),$$

обращающие в минимум интеграл

$$I = \int F\,[\lambda;\; u_1(\lambda);\; u_2(\lambda) \;...\; u_n(\lambda)]\, d\lambda,$$

причем искомые функции, кроме граничных условий и условий непрерывности, должны удовлетворять некоторым дополнительным требованиям относительно всего промежутка интегрирования. Если дополнительные условия представляются системой m уравнений связей ($m<n$)

$$\Phi_i\,[\lambda;\; u_1(\lambda);\; u_2(\lambda);\; .....\; u_n(\lambda)] = 0, \qquad i = 1 \div m),$$

то искомые функции (то есть условия, дающие минимум интегралу I) определяются системой уравнений

$$\frac{d}{d\lambda}\left[\frac{\partial F_1}{\partial u_i(\lambda)'}\right]-\frac{\partial F_1}{\partial u_i(\lambda)}=0, \qquad (i=1\div n),$$

где

$$F_1=F+\sum\varphi_i(\lambda)\cdot\Phi_i, \qquad (i=1\div m)$$

и m уравнений связей.

Уравнения связей в данном случае представляются системой уравнений, определяющих направленность и ортогональность осей главных напряжений:

$$\begin{aligned}&\alpha_i^2+\beta_i^2+\gamma_i^2=1 && (i=k)\\ &\alpha_i\cdot\alpha_k+\beta_i\cdot\beta_k+\gamma_i\cdot\gamma_k=0 && (i\neq k)\end{aligned} \qquad (i,k=1,2,3).$$

Вспомогательная функция F_1 в развернутой форме имеет вид

$$\begin{aligned}F_1=&(\sigma_1\cdot\alpha_1^2+\sigma_2\cdot\beta_1^2+\sigma_3\cdot\gamma_1^2)\,e_1'+(\sigma_1\cdot\alpha_2^2+\sigma_2\cdot\beta_2^2+\sigma_3\cdot\gamma_2^2)\,e_2'+\\&+(\sigma_1\cdot\alpha_3^2+\sigma_2\cdot\beta_3^2+\sigma_3\cdot\gamma_3^2)\,e_3'+\varphi_1(\alpha_1^2+\beta_1^2+\gamma_1^2-1)+\\&+\varphi_2(\alpha_2^2+\beta_2^2+\gamma_2^2-1)+\varphi_3(\alpha_3^2+\beta_3^2+\gamma_3^2-1)+\varphi_4(\alpha_1\cdot\alpha_2+\beta_1\cdot\beta_2+\gamma_1\cdot\gamma_2)+\\&+\varphi_5(\alpha_2\cdot\alpha_3+\beta_2\cdot\beta_3+\gamma_2\cdot\gamma_3)+\varphi_6(\alpha_1\cdot\alpha_3+\beta_1\cdot\beta_3+\gamma_1\cdot\gamma_3),\end{aligned}$$

где $\varphi_i(\lambda)$ — неопределенные функциональные множители Лагранжа.

В активном процессе простого нагружения для любого характера деформации (упругой или пластической) условия, определяющие минимум работы деформации, приведутся к следующей системе уравнений:

1. $\frac{d}{d\lambda}\left(\frac{\partial F_1}{\partial\alpha_1'}\right)-\frac{\partial F_1}{\partial\alpha_1}=2\sigma_1\cdot\alpha_1\cdot e_1'+2\varphi_1\cdot\alpha_1+\varphi_4\cdot\alpha_2+\varphi_6\cdot\alpha_3=0.$
2. $\frac{d}{d\lambda}\left(\frac{\partial F_1}{\partial\beta_1'}\right)-\frac{\partial F_1}{\partial\beta_1}=2\sigma_2\cdot\beta_1\cdot e_1'+2\varphi_1\cdot\beta_1+\varphi_4\cdot\beta_2+\varphi_6\cdot\beta_3=0.$
3. $\frac{d}{d\lambda}\left(\frac{\partial F_1}{\partial\gamma_1'}\right)-\frac{\partial F_1}{\partial\gamma_1}=2\sigma_3\cdot\gamma_1\cdot e_1'+2\varphi_1\cdot\gamma_1+\varphi_4\cdot\gamma_2+\varphi_6\cdot\gamma_3=0.$
4. $\frac{d}{d\lambda}\left(\frac{\partial F_1}{\partial\alpha_2'}\right)-\frac{\partial F_1}{\partial\alpha_2}=2\sigma_1\cdot\alpha_2\cdot e_2'+2\varphi_2\cdot\alpha_2+\varphi_4\cdot\alpha_1+\varphi_5\alpha_3=0.$
5. $\frac{d}{d\lambda}\left(\frac{\partial F_1}{\partial\beta_2'}\right)-\frac{\partial F_1}{\partial\beta_2}=2\sigma_2\cdot\beta_2\cdot e_2'+2\varphi_2\cdot\beta_2+\varphi_4\cdot\beta_1+\varphi_5\cdot\beta_3=0.$
6. $\frac{d}{d\lambda}\left(\frac{\partial F_1}{\partial\gamma_2'}\right)-\frac{\partial F_1}{\partial\gamma_2}=2\sigma_3\cdot\gamma_2\cdot e_2'+2\varphi_2\cdot\gamma_2+\varphi_4\cdot\gamma_1+\varphi_5\cdot\gamma_3=0.$
7. $\frac{d}{d\lambda}\left(\frac{\partial F_1}{\partial\alpha_3'}\right)-\frac{\partial F_1}{\partial\alpha_3}=2\sigma_1\cdot\alpha_3\cdot e_3'+2\varphi_3\cdot\alpha_3+\varphi_5\cdot\alpha_2+\varphi_6\cdot\alpha_1=0.$
8. $\frac{d}{d\lambda}\left(\frac{\partial F_1}{\partial\beta_3'}\right)-\frac{\partial F_1}{\partial\beta_3}=2\sigma_2\cdot\beta_3\cdot e_3'+2\varphi_3\cdot\beta_3+\varphi_5\cdot\beta_2+\varphi_6\cdot\beta_1=0.$
9. $\frac{d}{d\lambda}\left(\frac{\partial F_1}{\partial\gamma_3'}\right)-\frac{\partial F_1}{\partial\gamma_3}=2\sigma_3\cdot\gamma_3\cdot e_3'+2\varphi_3\cdot\gamma_3+\varphi_5\cdot\gamma_2+\varphi_6\cdot\gamma_1=0.$
10. $\alpha_1^2+\beta_1^2+\gamma_1^2=1.$
11. $\alpha_2^2+\beta_2^2+\gamma_2^2=1.$
12. $\alpha_3^2+\beta_3^2+\gamma_3^2=1.$
13. $\alpha_1\cdot\alpha_2+\beta_1\cdot\beta_2+\gamma_1\cdot\gamma_2=0.$
14. $\alpha_2\cdot\alpha_3+\beta_2\cdot\beta_3+\gamma_2\cdot\gamma_3=0.$
15. $\alpha_1\cdot\alpha_3+\beta_1\cdot\beta_3+\gamma_1\cdot\gamma_3=0.$

Укажем основные этапы решения. Исключая из уравнений $(1 \div 9)$ φ_1, φ_2, φ_3, получим систему:

$$\varphi_4\left(\frac{\alpha_2}{2\alpha_1}-\frac{\beta_2}{2\beta_1}\right)+\varphi_6\left(\frac{\alpha_3}{2\alpha_1}-\frac{\beta_3}{2\beta_1}\right)=e_1'(\sigma_2-\sigma_1),$$

$$\varphi_4\left(\frac{\alpha_2}{2\alpha_1}-\frac{\gamma_2}{2\gamma_1}\right)+\varphi_6\left(\frac{\alpha_3}{2\alpha_1}-\frac{\gamma_3}{2\gamma_1}\right)=e_1'(\sigma_3-\sigma_1),$$

$$\varphi_4\left(\frac{\alpha_1}{2\alpha_2}-\frac{\beta_1}{2\beta_2}\right)+\varphi_5\left(\frac{\alpha_3}{2\alpha_2}-\frac{\beta_3}{2\beta_2}\right)=e_2'(\sigma_2-\sigma_1),$$

$$\varphi_4\left(\frac{\alpha_1}{2\alpha_2}-\frac{\gamma_1}{2\gamma_2}\right)+\varphi_5\left(\frac{\alpha_3}{2\alpha_2}-\frac{\gamma_3}{2\gamma_2}\right)=e_2'(\sigma_3-\sigma_1),$$

$$\varphi_5\left(\frac{\alpha_2}{2\alpha_3}-\frac{\beta_2}{2\beta_3}\right)+\varphi_6\left(\frac{\alpha_1}{2\alpha_3}-\frac{\beta_1}{2\beta_3}\right)=e_3'(\sigma_3-\sigma_1),$$

$$\varphi_5\left(\frac{\alpha_2}{2\alpha_3}-\frac{\gamma_2}{2\gamma_3}\right)+\varphi_6\left(\frac{\alpha_1}{2\alpha_3}-\frac{\gamma_1}{2\gamma_3}\right)=e_3'(\sigma_3-\sigma_1),$$

которая с помощью соотношений $10 \div 15$ может быть упрощена:

$$\varphi_4\cdot\gamma_3-\varphi_6\cdot\gamma_2=2\alpha_1\cdot\beta_1\cdot e_1'(\sigma_1-\sigma_2)\qquad \varphi_4\cdot\beta_3-\varphi_5\cdot\beta_1=2\alpha_2\cdot\gamma_2\cdot e_2'(\sigma_1-\sigma_3),$$

$$\varphi_4\cdot\beta_3-\varphi_6\cdot\beta_2=2\alpha_1\cdot\gamma_1\cdot e_1'(\sigma_3-\sigma_1)\qquad \varphi_5\cdot\gamma_1-\varphi_6\cdot\gamma_2=2\alpha_3\cdot\beta_3\cdot e_3'(\sigma_2-\sigma_1),$$

$$\varphi_4\cdot\gamma_3-\varphi_6\cdot\gamma_1=2\alpha_2\cdot\beta_2\cdot e_2'(\sigma_2-\sigma_1)\qquad \varphi_6\cdot\beta_1-\varphi_6\cdot\beta_2=2\alpha_3\cdot\gamma_3\cdot e_3'(\sigma_1-\sigma_3).$$

Из этой системы уравнений можно выразить значения: φ_4, φ_5, φ_6,

$$\varphi_4=-2e_1'(\sigma_1\cdot\alpha_1\cdot\alpha_2+\sigma_2\cdot\beta_1\cdot\beta_2+\sigma_3\cdot\gamma_1\cdot\gamma_2),$$

$$\varphi_5=-2e_2'(\sigma_1\cdot\alpha_2\cdot\alpha_3+\sigma_2\cdot\beta_2\cdot\beta_3+\sigma_3\cdot\gamma_2\cdot\gamma_3),$$

$$\varphi_6=-2e_3'(\sigma_1\cdot\alpha_3\cdot\alpha_1+\sigma_2\cdot\beta_3\cdot\beta_1+\sigma_3\cdot\gamma_3\cdot\gamma_1),$$

а последовательное исключение φ_4, φ_5, φ_6 приводит к уравнениям типа:

$$(\sigma_1\cdot\alpha_1\cdot\alpha_2+\sigma_2\cdot\beta_1\cdot\beta_2+\sigma_3\cdot\gamma_1\cdot\gamma_2)(e_1'-e_2')=0,$$

$$(e_1'\cdot\alpha_1\cdot\beta_1+e_2\cdot\alpha_2\cdot\beta_2+e_3'\cdot\alpha_3\cdot\beta_3)(\sigma_1-\sigma_2)=0.$$

Оставляя в стороне частные решения $\sigma_1=\sigma_2=\sigma_3$ и $e_1=e_2=e_3$, не соответствующие общему случаю $\sigma_1\neq\sigma_2\neq\sigma_3$, находим:

$$\varphi_4=0,\qquad \varphi_5=0,\qquad \varphi_6=0.$$

Подставляя значения φ_4, φ_5, φ_6 в уравнения $(1 \div 9)$, получим:

$$\alpha_1(\sigma_1\cdot e_1'+\varphi_1)=0,\qquad \alpha_2(\sigma_1\cdot e_2'+\varphi_2)=0,\qquad \alpha_3(\sigma_1\cdot e_3'+\varphi_3)=0.$$

$$\beta_1(\sigma_2\cdot e_1'+\varphi_1)=0,\qquad \beta_2(\sigma_2\cdot e_2'+\varphi_2)=0,\qquad \beta_3(\sigma_2\cdot e_3'+\varphi_3)=0.$$

$$\gamma_1(\sigma_3\cdot e_1'+\varphi_1)=0,\qquad \gamma_2(\sigma_3\cdot e_2'+\varphi_2)=0,\qquad \gamma_3(\sigma_3\cdot e_3'+\varphi_3)=0.$$

Добавляя сюда систему уравнений связей $(10 \div 15)$ и решая совместно, для общего случая $\sigma_1\neq\sigma_2\neq\sigma_3$ находим:

$$\alpha_1=1,\qquad \alpha_2=0,\qquad \alpha_3=0.$$

$$\beta_1=0,\qquad \beta_2=1,\qquad \beta_3=0.$$

$$\gamma_1=0,\qquad \gamma_2=0,\qquad \gamma_3=1.$$

Полученное решение указывает на то, что совпадение главных направлений напряжений и деформаций является необходимым условием минимума работы процесса деформации.