

О ГЛАВНЫХ НАПРАВЛЕНИЯХ НАПРЯЖЕНИЙ И ДЕФОРМАЦИЙ

Г. А. ДОЩИНСКИЙ

(Представлена научным семинаром кафедры сопротивления материалов)

Одним из положений теории малых упруго-пластических деформаций является предположение о совпадении главных осей тензоров напряжений и деформаций. Это положение различно трактуется в учебной и научной литературе. В одних случаях оно рассматривается как необходимая исходная гипотеза, в других — как приближенное следствие экспериментальных наблюдений; чаще всего это положение приводится вообще без каких-либо обоснований. В то же время можно показать, что совпадение главных направлений для напряжений и деформаций (в частности, для условий простого нагружения изотропного тела) является проявлением известной физической закономерности, определяющей условия естественного протекания равновесного процесса, а именно, что совпадение главных напряжений и деформаций является необходимым условием минимума работы процесса упруго-пластической деформации.

Как известно из теории деформаций, деформированное состояние элемента может быть определено тремя взаимно ортогональными главными компонентами деформации: e_1 , e_2 , e_3 . Точно также напряженное состояние определяется тремя главными напряжениями: σ_1 , σ_2 , σ_3 .

Соотношения между напряжениями в различных площадках, а также соотношения между компонентами деформации в различных направлениях не зависят от свойства материалов, а всецело определяются статикой или геометрией.

Для некоторого состояния тела, претерпевающего деформацию и характеризуемого значением параметра нагружения λ , выделим элементарный кубик с гранями, перпендикулярными главным направлениям деформации в этом состоянии. Совместим направление de_1 с осью x , de_2 — с осью y , de_3 — с осью z . Допустим, что в этот произвольно взятый момент направления главных напряжений не совпадают с главными направлениями деформации и повернутые оси σ_1 , σ_2 , σ_3 образуют с осью x углы, косинусы которых соответственно равны: α_1 , β_1 , γ_1 ; с осью y — α_2 , β_2 , γ_2 ; с осью z — α_3 , β_3 , γ_3 (рис. 1). Тогда по граням указанного кубика можно показать напряжения:

$$\sigma_x = \sigma_1 \cdot \alpha_1^2 + \sigma_2 \cdot \beta_1^2 + \sigma_3 \cdot \gamma_1^2,$$

$$\sigma_y = \sigma_1 \cdot \alpha_2^2 + \sigma_2 \cdot \beta_2^2 + \sigma_3 \cdot \gamma_2^2,$$

$$\sigma_z = \sigma_1 \cdot \alpha_3^2 + \sigma_2 \cdot \beta_3^2 + \sigma_3 \cdot \gamma_3^2.$$

Кроме того, по граням будут и касательные напряжения, но так как грани кубика перпендикулярны главным направлениям деформации на данной стадии и, следовательно, не перекашиваются, то приращение работы деформации определится лишь выражением

$$dA = \sigma_x \cdot de_1 + \sigma_y \cdot de_2 + \sigma_z \cdot de_3.$$

Работа деформации при изменении параметра нагружения от 0 до λ

$$A = \int_0^\lambda [\sigma_1 \cdot \alpha_1^2 + \sigma_2 \cdot \beta_1^2 + \sigma_3 \cdot \gamma_1^2] e_1' + (\sigma_1 \cdot \alpha_2^2 + \sigma_2 \cdot \beta_2^2 + \sigma_3 \cdot \gamma_2^2) e_2' + \\ + (\sigma_1 \cdot \alpha_3^2 + \sigma_2 \cdot \beta_3^2 + \sigma_3 \cdot \gamma_3^2) e_3' d\lambda,$$

где все входящие величины предполагаются монотонно изменяющимися с изменением параметра нагружения λ .

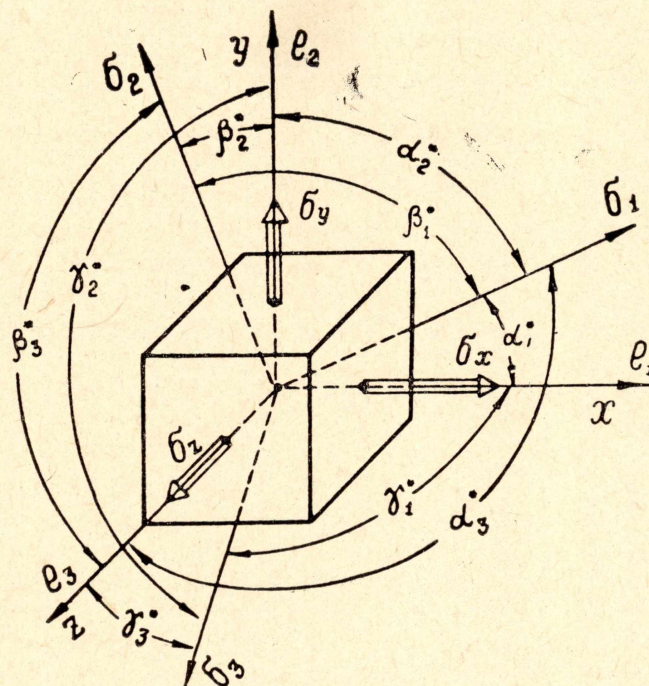


Рис. 1. $\alpha_1^* = \arccos \alpha_1$, $\beta_1^* = \arccos \beta_1$, $\gamma_3^* = \arccos \gamma_3$,

Косинусы углов, определяющих взаимную ориентацию осей главных напряжений и деформаций, будут связаны между собой определенными соотношениями. Поэтому приходим к следующей задаче вариационного исчисления — определить функции:

$$u_1(\lambda), u_2(\lambda), \dots u_n(\lambda),$$

обращающие в минимум интеграл

$$I = \int F[\lambda; u_1(\lambda); u_2(\lambda) \dots u_n(\lambda)] d\lambda,$$

причем искомые функции, кроме граничных условий и условий непрерывности, должны удовлетворять некоторым дополнительным требованиям относительно всего промежутка интегрирования. Если дополнительные условия представляются системой m уравнений связей ($m < n$)

$$\Phi_i[\lambda; u_1(\lambda); u_2(\lambda); \dots u_n(\lambda)] = 0, \quad i = 1 \div m),$$

то искомые функции (то есть условия, дающие минимум интегралу I) определяются системой уравнений

$$\frac{d}{d\lambda} \left[\frac{\partial F_1}{\partial u_i(\lambda)} \right] - \frac{\partial F_1}{\partial u_i(\lambda)} = 0, \quad (i = 1 \div n),$$

где

$$F_1 = F + \sum \varphi_i(\lambda) \cdot \Phi_i, \quad (i = 1 \div m)$$

и m уравнений связей.

Уравнения связей в данном случае представляются системой уравнений, определяющих направленность и ортогональность осей главных напряжений:

$$\begin{aligned} \alpha_i^2 + \beta_i^2 + \gamma_i^2 &= 1 & (i = k) \\ \alpha_i \cdot \alpha_k + \beta_i \cdot \beta_k + \gamma_i \cdot \gamma_k &= 0 & (i \neq k) \end{aligned} \quad (i, k = 1, 2, 3).$$

Вспомогательная функция F_1 в развернутой форме имеет вид

$$\begin{aligned} F_1 &= (\sigma_1 \cdot \alpha_1^2 + \sigma_2 \cdot \beta_1^2 + \sigma_3 \cdot \gamma_1^2) e_1' + (\sigma_1 \cdot \alpha_2^2 + \sigma_2 \cdot \beta_2^2 + \sigma_3 \cdot \gamma_2^2) e_2' + \\ &+ (\sigma_1 \cdot \alpha_3^2 + \sigma_2 \cdot \beta_3^2 + \sigma_3 \cdot \gamma_3^2) e_3' + \varphi_1 (\alpha_1^2 + \beta_1^2 + \gamma_1^2 - 1) + \\ &+ \varphi_2 (\alpha_2^2 + \beta_2^2 + \gamma_2^2 - 1) + \varphi_3 (\alpha_3^2 + \beta_3^2 + \gamma_3^2 - 1) + \varphi_4 (\alpha_1 \cdot \alpha_2 + \beta_1 \cdot \beta_2 + \gamma_1 \cdot \gamma_2) + \\ &+ \varphi_5 (\alpha_2 \cdot \alpha_3 + \beta_2 \cdot \beta_3 + \gamma_2 \cdot \gamma_3) + \varphi_6 (\alpha_1 \cdot \alpha_3 + \beta_1 \cdot \beta_3 + \gamma_1 \cdot \gamma_3), \end{aligned}$$

где $\varphi_i(\lambda)$ — неопределенные функциональные множители Лагранжа.

В активном процессе простого нагружения для любого характера деформации (упругой или пластической) условия, определяющие минимум работы деформации, приведутся к следующей системе уравнений:

1. $\frac{d}{d\lambda} \left(\frac{\partial F_1}{\partial \alpha_1'} \right) - \frac{\partial F_1}{\partial \alpha_1} = 2\sigma_1 \cdot \alpha_1 \cdot e_1' + 2\varphi_1 \cdot \alpha_1 + \varphi_4 \cdot \alpha_2 + \varphi_6 \cdot \alpha_3 = 0.$
2. $\frac{d}{d\lambda} \left(\frac{\partial F_1}{\partial \beta_1'} \right) - \frac{\partial F_1}{\partial \beta_1} = 2\sigma_2 \cdot \beta_1 \cdot e_1' + 2\varphi_1 \cdot \beta_1 + \varphi_4 \cdot \beta_2 + \varphi_6 \cdot \beta_3 = 0.$
3. $\frac{d}{d\lambda} \left(\frac{\partial F_1}{\partial \gamma_1'} \right) - \frac{\partial F_1}{\partial \gamma_1} = 2\sigma_3 \cdot \gamma_1 \cdot e_1' + 2\varphi_1 \cdot \gamma_1 + \varphi_4 \cdot \gamma_2 + \varphi_6 \cdot \gamma_3 = 0.$
4. $\frac{d}{d\lambda} \left(\frac{\partial F_1}{\partial \alpha_2'} \right) - \frac{\partial F_1}{\partial \alpha_2} = 2\sigma_1 \cdot \alpha_2 \cdot e_2' + 2\varphi_2 \cdot \alpha_2 + \varphi_4 \cdot \alpha_1 + \varphi_5 \cdot \alpha_3 = 0.$
5. $\frac{d}{d\lambda} \left(\frac{\partial F_1}{\partial \beta_2'} \right) - \frac{\partial F_1}{\partial \beta_2} = 2\sigma_2 \cdot \beta_2 \cdot e_2' + 2\varphi_2 \cdot \beta_2 + \varphi_4 \cdot \beta_1 + \varphi_5 \cdot \beta_3 = 0.$
6. $\frac{d}{d\lambda} \left(\frac{\partial F_1}{\partial \gamma_2'} \right) - \frac{\partial F_1}{\partial \gamma_2} = 2\sigma_3 \cdot \gamma_2 \cdot e_2' + 2\varphi_2 \cdot \gamma_2 + \varphi_4 \cdot \gamma_1 + \varphi_5 \cdot \gamma_3 = 0.$
7. $\frac{d}{d\lambda} \left(\frac{\partial F_1}{\partial \alpha_3'} \right) - \frac{\partial F_1}{\partial \alpha_3} = 2\sigma_1 \cdot \alpha_3 \cdot e_3' + 2\varphi_3 \cdot \alpha_3 + \varphi_5 \cdot \alpha_2 + \varphi_6 \cdot \alpha_1 = 0.$
8. $\frac{d}{d\lambda} \left(\frac{\partial F_1}{\partial \beta_3'} \right) - \frac{\partial F_1}{\partial \beta_3} = 2\sigma_2 \cdot \beta_3 \cdot e_3' + 2\varphi_3 \cdot \beta_3 + \varphi_5 \cdot \beta_2 + \varphi_6 \cdot \beta_1 = 0.$
9. $\frac{d}{d\lambda} \left(\frac{\partial F_1}{\partial \gamma_3'} \right) - \frac{\partial F_1}{\partial \gamma_3} = 2\sigma_3 \cdot \gamma_3 \cdot e_3' + 2\varphi_3 \cdot \gamma_3 + \varphi_5 \cdot \gamma_2 + \varphi_6 \cdot \gamma_1 = 0.$
10. $\alpha_1^2 + \beta_1^2 + \gamma_1^2 = 1.$
11. $\alpha_2^2 + \beta_2^2 + \gamma_2^2 = 1.$
12. $\alpha_3^2 + \beta_3^2 + \gamma_3^2 = 1.$
13. $\alpha_1 \cdot \alpha_2 + \beta_1 \cdot \beta_2 + \gamma_1 \cdot \gamma_2 = 0.$
14. $\alpha_2 \cdot \alpha_3 + \beta_2 \cdot \beta_3 + \gamma_2 \cdot \gamma_3 = 0.$
15. $\alpha_1 \cdot \alpha_3 + \beta_1 \cdot \beta_3 + \gamma_1 \cdot \gamma_3 = 0.$

Укажем основные этапы решения. Исключая из уравнений (1 ÷ 9) $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$, получим систему:

$$\varphi_4 \left(\frac{\alpha_2}{2\alpha_1} - \frac{\beta_2}{2\beta_1} \right) + \varphi_6 \left(\frac{\alpha_3}{2\alpha_1} - \frac{\beta_3}{2\beta_1} \right) = e'_1 (\sigma_2 - \sigma_1),$$

$$\varphi_4 \left(\frac{\alpha_2}{2\alpha_1} - \frac{\gamma_2}{2\gamma_1} \right) + \varphi_6 \left(\frac{\alpha_3}{2\alpha_1} - \frac{\gamma_3}{2\gamma_1} \right) = e'_1 (\sigma_3 - \sigma_1),$$

$$\varphi_4 \left(\frac{\alpha_1}{2\alpha_2} - \frac{\beta_1}{2\beta_2} \right) + \varphi_5 \left(\frac{\alpha_3}{2\alpha_2} - \frac{\beta_3}{2\beta_2} \right) = e'_2 (\sigma_2 - \sigma_1),$$

$$\varphi_4 \left(\frac{\alpha_1}{2\alpha_2} - \frac{\gamma_1}{2\gamma_2} \right) + \varphi_5 \left(\frac{\alpha_3}{2\alpha_2} - \frac{\gamma_3}{2\gamma_2} \right) = e'_2 (\sigma_3 - \sigma_1),$$

$$\varphi_5 \left(\frac{\alpha_2}{2\alpha_3} - \frac{\beta_2}{2\beta_3} \right) + \varphi_6 \left(\frac{\alpha_1}{2\alpha_3} - \frac{\beta_1}{2\beta_3} \right) = e'_3 (\sigma_3 - \sigma_1),$$

$$\varphi_5 \left(\frac{\alpha_2}{2\alpha_3} - \frac{\gamma_2}{2\gamma_3} \right) + \varphi_6 \left(\frac{\alpha_1}{2\alpha_3} - \frac{\gamma_1}{2\gamma_3} \right) = e'_3 (\sigma_3 - \sigma_1),$$

которая с помощью соотношений 10 ÷ 15 может быть упрощена:

$$\varphi_4 \cdot \gamma_3 - \varphi_6 \cdot \gamma_2 = 2\alpha_1 \cdot \beta_1 \cdot e'_1 (\sigma_1 - \sigma_2) \quad \varphi_4 \cdot \beta_3 - \varphi_5 \cdot \beta_1 = 2\alpha_2 \cdot \gamma_2 \cdot e'_2 (\sigma_1 - \sigma_3),$$

$$\varphi_4 \cdot \beta_3 - \varphi_6 \cdot \beta_2 = 2\alpha_1 \cdot \gamma_1 \cdot e'_1 (\sigma_3 - \sigma_1) \quad \varphi_5 \cdot \gamma_1 - \varphi_6 \cdot \gamma_2 = 2\alpha_3 \cdot \beta_3 \cdot e'_3 (\sigma_2 - \sigma_1),$$

$$\varphi_4 \cdot \gamma_3 - \varphi_6 \cdot \gamma_1 = 2\alpha_2 \cdot \beta_2 \cdot e'_2 (\sigma_2 - \sigma_1) \quad \varphi_6 \cdot \beta_1 - \varphi_5 \cdot \beta_2 = 2\alpha_3 \cdot \gamma_3 \cdot e'_3 (\sigma_1 - \sigma_3).$$

Из этой системы уравнений можно выразить значения: $\varphi_4, \varphi_5, \varphi_6$,

$$\varphi_4 = -2e'_1 (\sigma_1 \cdot \alpha_1 \cdot \alpha_2 + \sigma_2 \cdot \beta_1 \cdot \beta_2 + \sigma_3 \cdot \gamma_1 \cdot \gamma_2),$$

$$\varphi_5 = -2e'_2 (\sigma_1 \cdot \alpha_2 \cdot \alpha_3 + \sigma_2 \cdot \beta_2 \cdot \beta_3 + \sigma_3 \cdot \gamma_2 \cdot \gamma_3),$$

$$\varphi_6 = -2e'_3 (\sigma_1 \cdot \alpha_3 \cdot \alpha_1 + \sigma_2 \cdot \beta_3 \cdot \beta_1 + \sigma_3 \cdot \gamma_3 \cdot \gamma_1),$$

а последовательное исключение $\varphi_4, \varphi_5, \varphi_6$ приводит к уравнениям типа:

$$(\sigma_1 \cdot \alpha_1 \cdot \alpha_2 + \sigma_2 \cdot \beta_1 \cdot \beta_2 + \sigma_3 \cdot \gamma_1 \cdot \gamma_2)(e'_1 - e'_2) = 0,$$

$$(e'_1 \cdot \alpha_1 \cdot \beta_1 + e'_2 \cdot \alpha_2 \cdot \beta_2 + e'_3 \cdot \alpha_3 \cdot \beta_3)(\sigma_1 - \sigma_2) = 0.$$

Оставляя в стороне частные решения $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3$ и $e_1 = e_2 = e_3$, не соответствующие общему случаю $\sigma_1 \neq \sigma_2 \neq \sigma_3$, находим:

$$\varphi_4 = 0, \quad \varphi_5 = 0, \quad \varphi_6 = 0.$$

Подставляя значения $\varphi_4, \varphi_5, \varphi_6$ в уравнения (1 ÷ 9), получим:

$$\alpha_1 (\sigma_1 \cdot e'_1 + \varphi_1) = 0, \quad \alpha_2 (\sigma_1 \cdot e'_2 + \varphi_2) = 0, \quad \alpha_3 (\sigma_1 \cdot e'_3 + \varphi_3) = 0.$$

$$\beta_1 (\sigma_2 \cdot e'_1 + \varphi_1) = 0, \quad \beta_2 (\sigma_2 \cdot e'_2 + \varphi_2) = 0, \quad \beta_3 (\sigma_2 \cdot e'_3 + \varphi_3) = 0.$$

$$\gamma_1 (\sigma_3 \cdot e'_1 + \varphi_1) = 0, \quad \gamma_2 (\sigma_3 \cdot e'_2 + \varphi_2) = 0, \quad \gamma_3 (\sigma_3 \cdot e'_3 + \varphi_3) = 0.$$

Добавляя сюда систему уравнений связей (10 ÷ 15) и решая совместно, для общего случая $\sigma_1 \neq \sigma_2 \neq \sigma_3$ находим:

$$\alpha_1 = 1, \quad \alpha_2 = 0, \quad \alpha_3 = 0.$$

$$\beta_1 = 0, \quad \beta_2 = 1, \quad \beta_3 = 0.$$

$$\gamma_1 = 0, \quad \gamma_2 = 0, \quad \gamma_3 = 1.$$

Полученное решение указывает на то, что совпадение главных напряжений и деформаций является необходимым условием минимума работы процесса деформации.