

ИССЛЕДОВАНИЕ КОЛЕБАНИЙ ГРУЗА, УДАРЯЮЩЕГОСЯ ОБ ОГРАНИЧИТЕЛЬ

П. М. Алабужев, В. И. Копытов

Ряд технических вопросов, связанных с вынужденными колебаниями систем (с одной или несколькими степенями свободы), сводятся при некоторых допущениях к задаче о колебании груза на пружине с ударом о жесткий ограничитель. В качестве примера можно привести колеблющуюся систему «корпус — боек» бурильного, отбойного и др. типов молотков.

В работах [3, 5, 7] рассмотрены задачи о колебаниях массы между двумя ограничителями — упругими и жесткими. Задача о колебании массы на пружине с одним жестким ограничителем рассмотрена в работе [6], однако, нам представляется, что данное ниже решение является более

наглядным и простым. Исследование указанного вопроса нами проведено с помощью вариационного метода акад. Б. Г. Галеркина [1, 2], применение которого позволило определить характер нелинейности рассматриваемой колебательной системы. Теоретическое решение было проверено экспериментально на установке, изготовленной в Томском политехническом институте (рис. 1, а).

Результаты расчета и эксперимента приведены в виде формул и графиков.

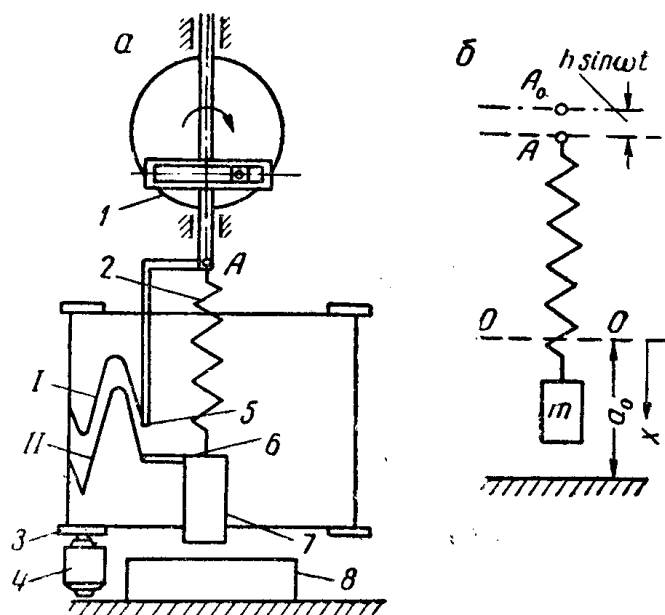


Рис. 1. Принципиальная схема установки:

1 — кулисный механизм; 2 — пружина; 3 — барабан, протягивающий бумагу; 4 — электродвигатель, вращающий барабан; 5 — карандаш для записи кривой I перемещения конца пружины и кривой II перемещения груза; 6 — груз массы m ; 7 — ограничитель колебаний.

Теоретическое решение задачи

Рассмотрим колебательную систему, изображенную на рис. 1. Требуется определить закон движения груза массы m , если конец A пружины совершает вертикальные гармонические колебания по закону

$$AA_0 = h \sin \omega t.$$

Рассмотрим задачу при следующих допущениях: затухания колебаний нет и удар груза об ограничитель не упругий. Будем искать такие периодические движения массы m , частота и фаза которых совпадают с частотой и фазой возмущения.

Дифференциальное уравнение движения рассматриваемой системы запишется в виде

$$m(\ddot{x} - h\omega^2 \sin \omega t) = mg - F(\lambda_{\text{ст}} + x),$$

или

$$m\ddot{x} + F(\lambda_{\text{ст}} + x) = mg + mh\omega^2 \sin \omega t, \quad (1)$$

где x — перемещение груза относительно положения статического равновесия системы OO ;

mg — сила тяжести груза массы m ;

$F(\lambda_{\text{ст}} + x)$ — сила упругости пружины, являющейся линейной величиной в промежутке изменения x от $-\infty$ до $(a_0 - h)$, т. е. до ограничителя;

a_0 — расстояние от положения статического равновесия груза на пружине до ограничителя при среднем положении точки A ;

$\lambda_{\text{ст}}$ — статическая деформация пружины, вызываемая грузом массы m ;

h — полуразмах свободного конца пружины.

В соответствии с методом акад. Галеркина частное решение уравнения (1) будем искать в виде ряда

$$x = x_0 + \sum_{i=0}^n a_{2i+1} \sin(2i+1)\omega t, \quad (2)$$

где x_0 — величина, не зависящая от времени t .

Найдем решение уравнения (1), ограничившись только первым членом ряда (2) (первое приближение),

$$x = x_0 + a \sin \omega t. \quad (3)$$

Подставим значение x в уравнение (1). Результат умножим на δx и проинтегрируем по t от 0 до $\frac{2\pi}{\omega}$, тогда получим

$$\int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} [-m\omega^2(a+h) \sin \omega t + F(\lambda_{\text{ст}} + x_0 + a \sin \omega t) - mg] (\delta x_0 + \delta a \sin \omega t) dt = 0,$$

откуда в силу независимости вариаций δx_0 и δa_0 получаем систему двух уравнений для определения величин x_0 и a_0

$$\left. \begin{aligned} \int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} [F(\lambda_{\text{ст}} + x_0 + a \sin \omega t) - mg] dt &= 0, \\ \int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} [-m\omega^2(a + h) \sin \omega t + F(\lambda_{\text{ст}} + x_0 + a \sin \omega t)] \sin \omega t dt &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

Отсюда:

$$\left. \begin{aligned} mg &= \frac{\omega}{2\pi} \int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} F(\lambda_{\text{ст}} + x_0 + a \sin \omega t) dt, \\ m\omega^2(a + h) &= \frac{\omega}{\pi} \int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} F(\lambda_{\text{ст}} + x_0 + a \sin \omega t) \sin \omega t dt. \end{aligned} \right\} \quad (4a)$$

Для вычисления интегралов, стоящих в правых частях уравнений (4a), необходимо знать конкретное выражение силы упругости

$$F(t) = F(\lambda_{\text{ст}} + x_0 + a \sin \omega t).$$

Очевидно, что если при колебании масса m не достигает ограничителя ($x < a_0 - h$), то

$$F(\lambda_{\text{ст}} + x) = c(\lambda_{\text{ст}} + x),$$

или

$$F(\lambda_{\text{ст}} + x_0 + a \sin \omega t) = c(\lambda_{\text{ст}} + x_0 + a \sin \omega t), \quad (5)$$

где c — постоянная жесткость пружины.

Подставляя значение силы упругости (5) в выражения (4a), после вычислений получим:
из первого уравнения

$$mg = c(\lambda_{\text{ст}} + x_0), \quad (6)$$

откуда

$$x_0 = 0,$$

из второго уравнения

$$m\omega^2(a + h) = ca,$$

поделив на c , после преобразований будем иметь

$$\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2 \cdot (a + h) = a, \quad (7)$$

откуда

$$a = \frac{h \left(\frac{\omega}{\omega_0} \right)^2}{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0} \right)^2}, \quad (7a)$$

где $\omega = \sqrt{\frac{c}{m}}$ — собственная частота линейной системы «груз—пружина» жесткости c .

Уравнение (7a) выражает зависимость амплитуды a вынужденных колебаний от частоты колебаний свободного конца пружины при движении массы m относительно положения статического равновесия. Очевидно, что при $\omega_0 > \omega$ (колебания в дорезонансной области) амплитуда a по величине равна динамической деформации пружины. Максимальное перемещение массы m относительно какой-либо неподвижной точки в дальнейшем будем называть амплитудой вынужденных колебаний в абсолютных координатах и обозначать через A . Очевидно,

$$A = a + h = \frac{h \left(\frac{\omega}{\omega_0} \right)^2}{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0} \right)^2} + h. \quad (8)$$

При $\omega_0 < \omega$ (колебания за линейным резонансом) движения свободного конца пружины и массы m находятся в противофазе. Амплитуда вынужденных колебаний массы m в относительных координатах выражается формулой

$$a = \frac{h \left(\frac{\omega}{\omega_0} \right)^2}{\left(\frac{\omega}{\omega_0} \right)^2 - 1}. \quad (9)$$

Амплитуда вынужденных колебаний массы m в абсолютных координатах в этом случае равна

$$A = a - h = \frac{h \left(\frac{\omega}{\omega_0} \right)^2}{\left(\frac{\omega}{\omega_0} \right)^2 - 1} - h. \quad (10)$$

Если в процессе колебаний масса m ударяется об ограничитель, то интегралы в выражениях (4a) дают иное значение после вычислений. В этом случае выражение силы упругости запишется в виде

$$F(\lambda_{\text{ст}} + x) = \begin{cases} c(\lambda_{\text{ст}} + x) & \text{при } x < a_0 - h, \\ c(\lambda_{\text{ст}} + a_0 - h) & \text{при } x = a_0 - h. \end{cases}$$

Из условия соприкосновения массы m с ограничителем получаем зависимость

$$a_0 - h_1 = x_0 + a, \quad (11)$$

откуда следует, что соприкосновение происходит при $t = \frac{\pi}{2\omega}$.

Таким образом, промежуток интегрирования по t разбивается на 4 части (движение массы от положения равновесия до ограничителя, соприкосновение, отход от ограничителя, движение в сторону сжатия пружины и обратно)

$$F(\lambda_{ст} + x_0 + a \sin \omega t) = \begin{cases} c(\lambda_{ст} + x_0 + a \sin \omega t) & \text{при } 0 \leq t \leq \frac{\pi}{2\omega} - \sigma, \\ c(\lambda_{ст} + a_0 - h) = \lim_{\sigma \rightarrow 0} \frac{\omega}{\pi} \int_{\frac{\pi}{2\omega} - \sigma}^{\frac{\pi}{2\omega}} \varphi\left(t - \frac{\pi}{2\omega} + \sigma\right) dt = \lim_{\sigma \rightarrow 0} \frac{\omega}{\pi} \int_0^{\sigma} \varphi(\tau) d\tau & \text{при } \frac{\pi}{2\omega} - \sigma \leq t \leq \frac{\pi}{2\omega}, \\ c(\lambda_{ст} + a_0 - h) = \lim_{\sigma \rightarrow 0} \frac{\omega}{\pi} \int_{\frac{\pi}{2\omega}}^{\frac{\pi}{2\omega} + \sigma} \varphi\left(\frac{\pi}{2\omega} + \sigma - t\right) dt = \lim_{\sigma \rightarrow 0} \frac{\omega}{\pi} \int_0^{\sigma} \varphi(\tau) d\tau & \text{при } \frac{\pi}{2\omega} \leq t \leq \frac{\pi}{2\omega} + \sigma, \\ c(\lambda_{ст} + x_0 + a \sin \omega t) & \text{при } \frac{\pi}{2\omega} + \sigma \leq t \leq \frac{2\pi}{\omega}. \end{cases} \quad (12)$$

Чтобы учесть влияние ограничителя на величины амплитуд вынужденных колебаний массы m , в выражении (12) значения функции $F(\lambda_{ст} + x_0 + a \sin \omega t)$ при $t = \frac{\pi}{2\omega}$ представлены в интегральной форме, как и предлагал в таких случаях поступать А. Н. Крылов [4, стр. 400]. Поэтому представляется возможным силу упругости при $t = \frac{\pi}{2\omega}$ записать в виде

$$F(\lambda_{ст} + a_0 - h) = \lim_{\sigma \rightarrow 0} \frac{\omega}{\pi} \int_0^{\sigma} \varphi(\tau) d\tau,$$

это означает, что рассматриваемая сила характеризуется некоторой функцией $\varphi(\tau)$ в малом промежутке времени в смежности с моментом соприкосновения (удара).

Подставляя выражение (12) в интеграл, стоящий справа в первом уравнении (4а), и, разбивая промежуток интегрирования на четыре части, получим

$$mg = \frac{\omega}{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2\omega} - \sigma} c(\lambda_{\text{сг}} + x_0 + a \sin \omega t) dt \Big|_{\sigma=0} + \frac{1}{2} \lim_{\sigma \rightarrow 0} \frac{\omega}{\pi} \int_{\frac{\pi}{2\omega} - \sigma}^{\frac{\pi}{2\omega}} \varphi\left(t - \frac{\pi}{2\omega} + \sigma\right) dt +$$

$$+ \frac{1}{2} \lim_{\sigma \rightarrow 0} \frac{\omega}{\pi} \int_{\frac{\pi}{2\omega}}^{\frac{\pi}{2\omega} + \sigma} \varphi\left(\frac{\pi}{2\omega} + \sigma - t\right) dt + \frac{\omega}{2\pi} \int_{\frac{\pi}{2\omega} + \sigma}^{\frac{2\pi}{\omega}} c(\lambda_{\text{сг}} + x_0 + a \sin \omega t) dt \Big|_{\sigma=0},$$

откуда, сделав соответствующие вычисления, имеем

$$x_0 = -(\lambda_{\text{сг}} + a_0 - h). \quad (13)$$

Из второго уравнения (4а) будем иметь

$$m\omega^2(a + h) = \frac{\omega}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2\omega} - \sigma} c(\lambda_{\text{сг}} + x_0 + a \sin \omega t) \sin \omega t dt \Big|_{\sigma=0} +$$

$$+ \lim_{\sigma \rightarrow 0} \frac{\omega}{\pi} \int_{\frac{\pi}{2\omega} - \sigma}^{\frac{\pi}{2\omega}} \varphi\left(t - \frac{\pi}{2\omega} + \sigma\right) \sin \omega t dt + \lim_{\sigma \rightarrow 0} \frac{\omega}{\pi} \int_{\frac{\pi}{2\omega}}^{\frac{\pi}{2\omega} + \sigma} \varphi\left(\frac{\pi}{2\omega} + \sigma - t\right) \sin \omega t dt +$$

$$+ \frac{\omega}{\pi} \int_{\frac{\pi}{2\omega} + \sigma}^{\frac{2\pi}{\omega}} c(\lambda_{\text{сг}} + x_0 + a \sin \omega t) \sin \omega t dt \Big|_{\sigma=0},$$

откуда

$$m\omega^2(a + h) = ca + 2c(\lambda_{\text{сг}} + a_0 - h)$$

или, поделив на c , получим

$$\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2(a + h) = a + 2(\lambda_{\text{сг}} + a_0 - h). \quad (14)$$

Некоторую особенность представляет вычисление интегралов

$$\lim_{\sigma \rightarrow 0} \frac{\omega}{\pi} \int_{\frac{\pi}{2\omega} - \sigma}^{\frac{\pi}{2\omega}} \varphi\left(t - \frac{\pi}{2\omega} + \sigma\right) \sin \omega t dt \quad (a)$$

и

$$\lim_{\sigma \rightarrow 0} \frac{\omega}{\pi} \int_{\frac{\pi}{2\omega}}^{\frac{\pi}{2\omega} + \sigma} \varphi\left(\frac{\pi}{2\omega} + \sigma - t\right) \sin \omega t dt. \quad (б)$$

Для вычисления интеграла (а) сделаем замену переменного, полагая

$$t = \tau + \frac{\pi}{2\omega} - \sigma,$$

тогда выражение (а) запишется в несколько ином виде, а именно:

$$\lim_{\sigma \rightarrow 0} \frac{\omega}{\pi} \int_0^{\sigma} \varphi(\tau) \sin \omega t \left(\tau + \frac{\pi}{2\omega} - \sigma \right) d\tau.$$

Так как синус в малом промежутке $(0, \sigma)$ знака не меняет, то, используя теорему о среднем, получим

$$\lim_{\sigma \rightarrow 0} \sin \omega \left(\frac{\pi}{2\omega} - \theta \sigma \right) \frac{\omega}{\pi} \int_0^{\sigma} \varphi(\tau) d\tau = c (\lambda_{ст} + a_0 - h). \quad (0 \leq \theta \leq 1).$$

Аналогично вычисляется и второй интеграл (б), в котором необходимо сделать замену переменного по формуле

$$t = \frac{\pi}{2\omega} + \sigma - \tau,$$

в результате чего получаем

$$\lim_{\sigma \rightarrow 0} \sin \omega \left(\frac{\pi}{2\omega} + \theta \sigma \right) \frac{\omega}{\pi} \int_0^{\sigma} \varphi(\tau) d\tau = c (\lambda_{ст} + a_0 - h).$$

Уравнение (14) с учетом (13) и (11) запишется в виде

$$\left(\frac{\omega}{\omega_0} \right)^2 (a + h) = a - 2x_0 = a + 2[a - (a_0 - h)] = 3a - 2(a_0 - h),$$

откуда

$$a = \frac{2(a_0 - h) + h \left(\frac{\omega}{\omega_0} \right)^2}{3 - \left(\frac{\omega}{\omega_0} \right)^2}. \quad (15)$$

Выражение (15) дает в первом приближении зависимость относительной амплитуды вынужденных колебаний массы m , ударяющейся об ограничитель, от частоты колебаний свободного конца пружины. Амплитуда вынужденных колебаний в абсолютных координатах будет

$$A = a + h \frac{2(a_0 - h) + h \left(\frac{\omega}{\omega_0} \right)^2}{3 - \left(\frac{\omega}{\omega_0} \right)^2} + h.$$

Задаваясь значениями параметров системы h , a_0 и ω_0 (т. е. c и m), строим график (рис. 2) зависимости амплитуды вынуж-

денных колебаний в абсолютных координатах от частоты возмущения ω (по оси абсцисс отложены значения $\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2$, что, очевидно, изменяет масштаб кривых, но не изменяет их характера). График, приведенный на рис. 2, наглядно иллюстрирует картину развития колебаний массы m . С ростом ω или $\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2$ абсолютные амплитуды вынужденных колебаний массы m , опре-

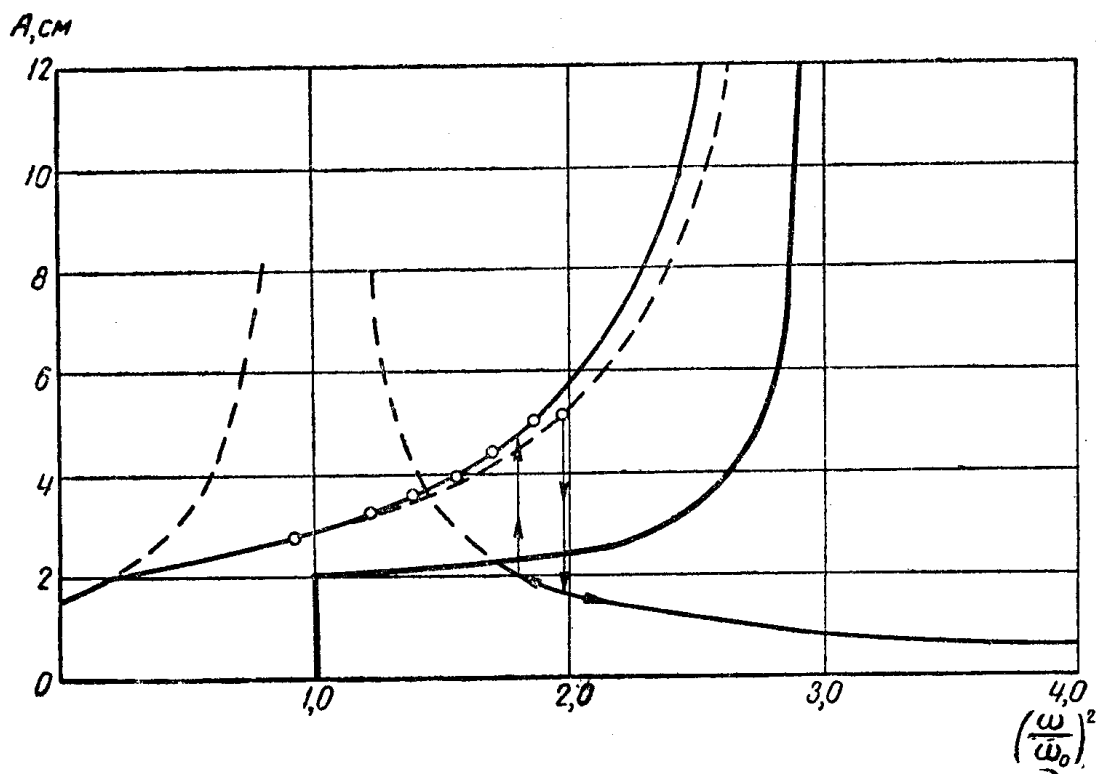


Рис. 2. Расчетные амплитудные кривые:

сплошная линия соответствует первому приближению, пунктирная линия — второму приближению. Значения амплитуд, найденных из опыта, нанесены в виде отдельных точек. Абсолютные значения постоянных величин: $\omega_0 = 16,7$ 1/сек., $a_0 = 2,0$ см; $h = 1,6$ см.

деляемые по формуле (16), растут до некоторого значения. После чего происходит срыв ударных колебаний, и масса m колеблется, не достигая ограничителя. В результате имеем линейный случай колебаний. Определение абсолютных амплитуд вынужденных колебаний массы m производим по формуле (10). В момент срыва происходит сдвиг вынужденных колебаний по фазе. Наоборот, при уменьшении частоты возмущающей силы от значения $\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2 > 3$ абсолютные амплитуды вынужденных колебаний массы m , определенные по формуле (10), растут. При достижении амплитудой такой величины, когда масса m будет касаться ограничителя, произойдет резкий скачок величины амплитуды вверх и точка попадает на кривую, определяемую уравнением (16). Из условия соприкосновения с ограничителем

определим значение величины $\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2$, при котором происходит скачкообразное увеличение амплитуды вынужденных колебаний массы m ,

$$\frac{h\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}{\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2 - 1} - h = a_0,$$

откуда

$$\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2 = 1 + \frac{h}{a_0}. \quad (17)$$

Отбрасывая в формуле (16) член, характеризующий возмущение, получим в первом приближении уравнение, которое связывает частоту свободных колебаний массы m с ударом об ограничитель в зависимости от амплитуды колебаний (резонансная кривая),

$$A = \frac{2(a_0 - h)}{3 - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2} + h. \quad (18)$$

Таким образом, получили типичную для нелинейной задачи картину, когда одному значению параметра возмущения соответствуют два значения амплитуды вынужденных колебаний.

Отметим, что при проведении экспериментов наблюдалось следующее явление. При значениях h , близких по величине к a_0 , с ростом частоты возмущения после срыва колебаний наблюдались устойчивые ударные колебания массы m с частотой, равной $\frac{1}{2}\omega$ и $\frac{1}{3}\omega$. Иными словами, имели место субгармонические колебания. В данной работе вопрос об определении субгармоник не рассматривался.

На рис. 3 приведены амплитудные кривые при различных значениях a_0 и h , откуда видно, что если менять только величину зазора a_0 , а величину полуразмаха h конца пружины оставлять постоянной, то амплитудные кривые будут смещаться вверх или вниз (a_0 соответственно увеличивается или уменьшается). При этом точка A излома амплитудной кривой, соответствующая моменту соприкосновения массы m с ограничителем, будет смещаться по кривой, отображающей линейный случай при данной величине h . В этом случае также будут смещаться и резонансные кривые, причем точка перелома C будет перемещаться вдоль прямой $\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2 = 1$, соответствующей линейному резонансу.

При $a_0 = \text{const}$ и изменении величины h амплитудные кривые смещаются либо вправо (h уменьшается), либо влево (h увеличивается).

Оценим достаточность первого приближения при решении подобного рода задач. Для этого найдем решение уравнения (1), взяв в ряде (2) два члена,

$$x = x_0 + a_1 \sin \omega t + a_3 \sin 3\omega t. \quad (19)$$

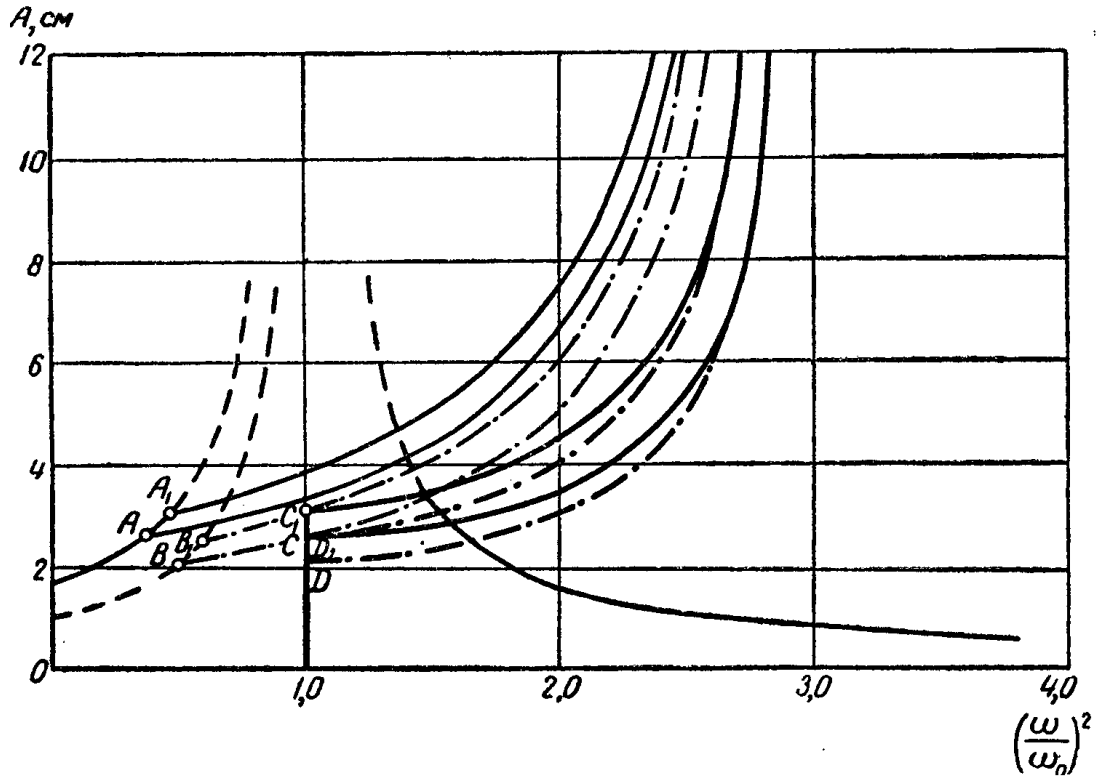


Рис. 3. Расчетные амплитудные кривые при различных значениях параметров системы a_0 и h .

Сплошные линии соответствуют значению $h = 1,6$ см; $a_0 = 2,5$ и 3 см; штрихпунктирные линии соответствуют значению $h = 1$ см, $a_0 = 2,0$ и $2,5$ см. Жирные линии — резонансные кривые при соответствующих значениях параметров системы a_0 и h .

Сделав вычисления, аналогичные проведенным в первом приближении, получим для определения a_1 и a_3 следующую систему алгебраических уравнений:

$$\left. \begin{aligned} \left[\left(\frac{\omega}{\omega_0} \right)^2 - 1 \right] a_1 - 2(a_1 - a_3) + 2(a_0 - h) + h \left(\frac{\omega}{\omega_0} \right)^2 &= 0, \\ - \left[9 \left(\frac{\omega}{\omega_0} \right)^2 - 1 \right] a_3 - 2(a_1 - a_3) + 2(a_0 - h) &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (20)$$

Из выражения (19) следует, что величина x имеет максимум при $t = \frac{\pi}{2\omega}$

$$x_{\max} = x_0 + a_1 - a_3. \quad (21)$$

Решая систему алгебраических уравнений (20) относительно a_1 и a_3 , получим:

$$\left. \begin{aligned} a_1 &= \frac{(21h - 18a_0) \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2 + 2(a_0 - h) - 9h \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^4}{9 \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^4 - \left(30 \frac{\omega}{\omega_0}\right)^2 + 5}, \\ a_3 &= \frac{\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2 - 1}{9 \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2 - 1} a_1 - \frac{h \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}{9 \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2 - 1}. \end{aligned} \right\} \quad (22)$$

Величины a_1 и a_3 стремятся к бесконечности, когда знаменатель равен нулю, следовательно,

$$9 \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^4 - 30 \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2 + 5 = 0,$$

откуда определяем два значения величины $\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2$:

$$\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2 = 3,16 \quad \text{и} \quad \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2 = 0,18.$$

Очевидно, второй корень следует отбросить, так как он не удовлетворяет требованиям поставленной задачи.

Таким образом, с учетом второго члена ряда (2) амплитуда вынужденных колебаний в абсолютных координатах будет несколько отличаться от соответствующей амплитуды, определенной в первом приближении (см. рис. 2). Поправка от второго члена ряда (2) на общее значение $x_{\max}$ составляет величину не более 15% при значениях $\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2 < 2,8$. Как показывают эксперименты, в реальных системах вследствие наличия сил сопротивления, действие которых на колебательную систему возрастает с ростом амплитуды колебания, срыв устойчивых колебаний с ударом об ограничитель происходит при значениях $\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2 < 2,3$. Следовательно, в практических расчетах можно ограничиваться только первым приближением. Это значительно сокращает объем вычислительной работы.

Экспериментальные исследования

Для проверки правильности изложенного выше решения нами были проведены опыты на установке, изготовленной в Томском политехническом институте (рис. 1). Стальной груз массы m , подвешенный на пружине (постоянной жесткости c), уда-

рялся об ограничитель (чтобы обеспечить условия, близкие к неупругому удару, ограничитель был выполнен из дерева — бука). Свободный конец A пружины был связан с рамкой кулисного механизма и вместе с ней совершал вертикальное колебательное движение по закону $AA_0 = h \sin \omega t$.

Методика эксперимента была принята следующая:

1) фиксировалось расстояние a_0 массы m от ограничителя при среднем положении точки A ;

2) изменялась угловая скорость ω вращения кривошипа кулисы, а следовательно, и частота колебаний свободного конца A пружины и груза массы m ;

3) в течение определенного промежутка времени (приблизительно 10 сек.) карандашами на бумагу, закрепленную на вращающемся барабане, одновременно записывались кривые перемещения массы m и свободного конца A пружины.

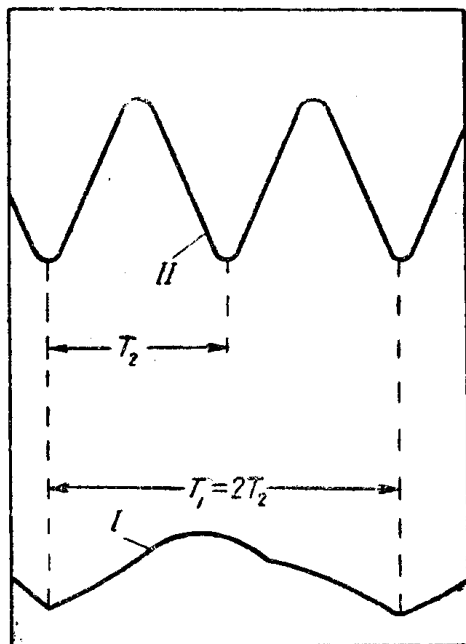


Рис. 4. Виброграмма субгармонических колебаний массы m с ударом об ограничитель:

I — кривая пути массы m (во времени); II — кривая пути свободного конца пружины (во времени). Период колебания T_1 массы m равен удвоенному периоду колебания T_2 свободного конца пружины A .

Угловая скорость кривошипа увеличилась до тех пор, пока не наступал срыв колебаний массы m с ударом об ограничитель (ударные колебания). После срыва ударных колебаний можем и дальше увеличивать частоту вынужденных колебаний. При этом масса m при $h < a_0$ будет «плавать» в зазоре, не касаясь ограничителя. При $h > a_0$, начиная с некоторой частоты ω , получим устойчивые субгармонические колебания с частотой, равной $\frac{1}{2} \omega$, $\frac{1}{3} \omega$ и т. д. (рис. 4).

Наоборот, в случае уменьшения частоты вынужденных колебаний, скачок амплитуды вынужденных ко-

лебаний массы m произойдет при частоте ω , меньшей значения ее при срыве колебаний, т. е. наблюдается явление «затягивания». Глубина «затягивания» определяется формулой (17), которая подтверждается экспериментально.

Имея число колебаний конца A пружины и зная время опыта, определяем частоту ω вынужденных колебаний. Величину амплитуды вынужденных колебаний массы m непосредственно снимаем с записи на бумаге.

Экспериментальные точки нанесены на теоретическую кривую (рис. 2), откуда следует, что решение задачи в первом приближении в пределах эксперимента дает вполне удовлетворительный результат.

ВЫВОДЫ

В работе дается несколько иное, новое решение задачи о колебании массы на пружине с одним жестким ограничителем [6] с применением более общих методов, предложенных А. Н. Крыловым и Б. Г. Галеркиным.

Результаты, полученные теоретически и подтвержденные экспериментально, показывают, что введение ограничителя колебаний в систему «масса — пружина» делает последнюю нелинейной, причем система «масса — пружина — ограничитель» становится более «жесткой» (резонансные кривые наклоняются вправо).

Приведенные в работе формулы для амплитуды вынужденных колебаний массы m , как в относительном, так и абсолютном движениях, могут быть использованы при расчете подобного рода систем, особенно, если системы работают в резонансном режиме. Наивыгоднейшей при этом является частота, определяемая формулой (17). Хотя амплитуда вынужденных колебаний и увеличивается с ростом частоты вынужденных колебаний, однако появляется большая опасность «срыва» ударных колебаний.

В работе рассмотрен только случай неупругого удара об ограничитель. Однако экспериментальному изучению был подвергнут также и случай упругого удара (ограничитель из стали, алюминия, свинца), причем в последнем случае экспериментальные кривые отходят от теоретической, будучи почти эквидистантны последней. С математической стороны задача о колебаниях с упругим ударом представляет значительные трудности и требует дополнительных условий и предположений. В этом случае необходимо знать время контакта и величину упругой деформации ограничителя. Колебательный процесс должен будет описываться за время цикла двумя уравнениями, соответствующими времени контакта массы с ограничителем и времени движения массы между ударами. В такой постановке задача должна рассматриваться только для данных конкретных условий.

Исследование решения дифференциального уравнения колебательного движения массы системы «упругая связь — масса — жесткий ограничитель» показывает, что применяя метод Б. Г. Галеркина к такого типа задачам, достаточно ограничиться только первым приближением.

ЛИТЕРАТУРА

1. В. В. Болотин. Динамическая устойчивость упругих систем, Гостехиздат, 1956.
2. А. Н. Динник. О методе Галеркина для определения критических сил и частот колебаний. Избранные труды, т. III, АН УССР, Киев, 1956.
3. Ю. И. Иориш. Защита самолетного оборудования от вибраций. Оборонгиз, 1949.

4. А. Н. Крылов. О некоторых дифференциальных уравнениях математической физики, имеющих приложение в технических вопросах. АН СССР, 1932.
 5. А. И. Лурье, А. И. Чекмарев. Вынужденные колебания в нелинейной системе с характеристикой, составленной из двух прямолинейных отрезков. Прикладная математика и механика, новая серия, т. I, в. 3, 1938.
 6. И. Г. Русаков и А. А. Харкевич. Вынужденные колебания системы, ударяющейся об ограничитель, ЖТФ, т. XII, в. 11—12, 1942.
 7. А. И. Чекмарев. Влияние постоянной силы на колебания в нелинейных системах. Инженерный сборник, т. IV, в. 2, 1948.
-

ЗАМЕЧЕННЫЕ ОПЕЧАТКИ

Страница	Строка	Напечатано	Должно быть	По вине
13	1 сн.	7-10	T-10	Корр.
14	13 сн.	R-754	RH-754	»
28	1 сн.	$A_y = \frac{mV_6^2}{2}$	$A_y = \frac{mV_y^2}{2}$	Авт.
34	18—20 сн.		2 — диаграмма колебаний корпуса молотка; 3—диаграмма углового перемещения бура; 4—диаграмма давления воздуха в задней полости цилиндра молотка; 5 — диаграмма давления в передней полости;	
35	1 сн.	Scerving Stienze	Serving Science	Авт.
46	14 сн.	изменения	изменении	Ред.
90—91	Рис. 7 и 8	поменять местами, сохранив на месте подрисовочные подписи		Тип.
97	10 сн.	бурильного молотка	автоподатчика	Авт.
107	2—3 сн.	остановки	остановкой	»
156	2 св.	поверхностей	поверхностной	Корр.
166	14 сн.	разбуренным	пробуренным	Авт.
179	9 св.	кинетическую	кинематическую	Корр.
189	5 св.	(59—200 мм)	(50—200 мм)	»
192	10 сн.	расширится	расширителя	Тип.
197	1 св.	кинетики	кинематики	Корр.
198	3—6 св.	Строку пятую читать после второй строки	Строку пятую читать после второй строки	Тип.
199	14 сн.	кинетики	кинематики	Авт.
212	12 св.	Л. Б. Левенмон	Л. Б. Левенсон	Авт.
219	3 сн.	$A = a + h . . . + h .$	$A = a + h . . . + h . (16)$	Корр.
223	3 св.	$- \left(30 \frac{\omega}{\omega_0} \right)^2 + 5$	$- 30 \left(\frac{\omega}{\omega_0} \right)^2 + 5$	Тип.
224	19—20 св.	увеличилась	увеличивалась	Корр.
229	10 св.	АОФ4-2	АОФ42-2	Авт.
243	11 св.	1, 15	1, 5	Корр.