ИЗВЕСТИЯ
ТОМСКОГО ОРДЕНА ТРУДОВОГО КРАСНОГО ЗНАМЕНИ ПОЛИТЕХНИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА имени С. М. КИРОВА

Том 160 1966

ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА МАТЕМАТИЧЕСКОЙ СТАТИСТИКИ ДЛЯ ИССЛЕДОВАНИЯ КОММУТАЦИИ

Э. К. СТРЕЛЬБИЦКИЙ, В. С. СТУКАЧ, А. Я. ЦИРУЛИК

(Представлена научным семинаром кафедр электрических машин и общей электротехники)

Наличие технологических отклонений приводит к неодинаковому качеству коммутации машин одного типоразмера. Для определения влияния технологии на средний уровень и дисперсию искрения, для назначения обоснованной системы допусков, для прогнозирования устойчивости коммутации во времени необходимо знать зависимость искрения от технологических и механических факторов. Такую зависимость назовем математической моделью искрения.

Имеющиеся в настоящее время модели коммутации не включают механические и технологические факторы и поэтому не объясняют дисперсии искрения машин одной серии. Поэтому для решения указанных выше задач необходимо прежде всего создать достаточно адекватную модель коммутации.

Здесь представляются возможным два пути поиска модели.

Классический путь предполагает исследование механизма процесса, описание элементарных процессов в системе интегро-дифференциальными уравнениями и на этой основе построение теоретической модели коммутации, учитывающей технологические и механические факторы.

Этот путь не приводит к решению задачи в разумные сроки.

Целесообразно пойти по пути эмпирического поиска статистической модели коммутации. Схема такого поиска показана на рис. 1, а сущность метода заключается в следующем.

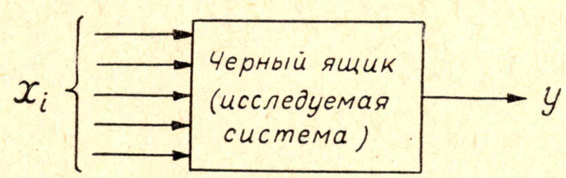

Рис. 1.

На вход системы воздействует К факторов, варьируемых на разных уровнях. Система является оператором, преобразующим поступающую информацию по неизвестному нам алгоритму и выдает на выходе величину $y=\varphi(x_1, x_2, \ldots, x_K)$. Эта функция называется функцией отклика, а соответствующий ей геометрический образ в пространстве переменных x_i — поверхностью отклика.

Отыскание функции отклика осуществляется методами регрессионного анализа. Вид функции отклика обычно неизвестен, поэтому ее представляют в виде полинома, являющегося, таким образом, разложением действительной функции отклика:

$$\hat{y} = b_0 + \sum^{k} b_i x_i + \sum^{k}_{i<j} b_{ij} x_i x_j + \sum^{k} b_{ii} x^2_i + \ldots \qquad (1)$$

Здесь $\hat{y}$ — оценка y, x_i — учитываемые факторы. Хотя полиноминальная форма не позволяет немедленно получить полную эвристическую информацию о процессе, но зато этот метод дает техническое решение в разумные сроки при неполном знании механизма процесса.

Для большинства задач достаточно ограничиться линейной или квадратной частью полинома (1). Квадратичная форма применяется для повышения адекватности представления поверхности отклика при существенном отклонении ее от линейности. В конкретных случаях адекватность представления можно повысить, заменяя переменные x_i их функциями на основании априорных сведений о процессе. При исследовании коммутации машин серии П предварительный анализ двухмерных зависимостей $y=\varphi(x)$ показал целесообразность представления функции отклика в мультипликативно-функциональной форме, легко превращаемой в полиноминальную после логарифмирования:

$$\hat{y} = b_0 \cdot \prod^{m}_{i=1} x_i^{b_i} \cdot \exp[\sum^{k}_{i=m+1} b_i \cdot x_i], \qquad (2)$$

$$\ln\hat{y} = b_0^1 + \sum^{m}_{i=1} b_i \cdot \ln x_i + \sum^{k}_{i=m+1} b_i \cdot x_i. \qquad (3)$$

Здесь $x_i (i \leqslant m)$ — факторы, сводящие y к нулю при $x_i=0$;
$x_i (i>m)$ — факторы, минимизирующие (максимизирующие) y при $x_i=0$.

На первом этапе исследования для отработки метода и для определения существенно влияющих факторов (отсеивающий эксперимент) мы ограничились линейной моделью (3) и включили следующие факторы:

x_1 — ток якоря, I, *а*;
x_2 — напряжение на якоре U, *b*;
x_3 — скорость вращения n, 1000 *об/мин.*;
x_4 — давление на щетку p, 100 *г*;
x_5 — эксцентриситет коллектора e, *мк*;
x_6 — эллиптичность коллектора E, *мк*;
x_7 — среднеквадратическое отклонение перепадов ламелей σ, *мк*.

В качестве выходной величины y, характеризующей степень искрения, нами принято напряжение под сбегающим краем щетки, измеренное методом дополнительной щетки.

Математически задача состоит в определении коэффициентов регрессии b_i решением системы уравнений

$$X^* X \cdot B = X^* Y, \qquad (4)$$

полученных путем дифференцирования квадратичной формы

$$\sum^{N}_{u=1} (y_u - \hat{y}_u)^2 \qquad (5)$$

по всем коэффициентам регрессии и приравнивания их нулю с целью минимизации формы (5) (метод наименьших квадратов). Здесь N — число опытов (вариантов) варьирования переменных. В матрице $X^* X$ коэффициентов системы уравнений элемент i-той строки и j-того столбца равен $\sum^{N}_{u=1} x_{iu} \cdot x_{ju}$ — скалярному произведению векторов — столбцов X_i и X_j. В матрице свободных членов X^*Y i-тый элемент равен

$\sum\limits_{u=1}^{N} x_{iu} \cdot y_u$. Решение системы (4) в матричной форме запишется выражением (6):

$$B = (X^* \, X)^{-1} \, (X^* \, Y) \tag{6}$$

или в алгебраической форме:

$$B_i = \sum_{j=0}^{K} c_{ij} \sum_{u=1}^{N} x_{ju} \cdot y_u, \tag{7}$$

где c_{ij} — элемент i-той строки и j-того столбца матрицы $(X^* \, X)^{-1}$.

При произвольном варьировании параметров x_i (так называемый «пассивный эксперимент») возникают следующие неудобства:

1. Так как обычно принято варьировать переменные поочередно, то информацию о каждом коэффициенте b_i несет небольшая часть опытов. Поэтому коэффициенты регрессии оцениваются с большой дисперсией.

2. Так как параметры x_i при произвольном планировании эксперимента оказываются попарно коррелированными $\left(\sum\limits_{ui\neq}^{N} x_{iu} \cdot x_{ju} \neq 0 \right)$, то коэффициенты регрессии определяются зависимо друг от друга. Невозможно разделить отдельные эффекты и эффекты взаимодействия. Нельзя получить математической модели процесса.

Это положение не относится к случаю, когда истинная функция отклика линейна.

3. Трудоемки расчеты.

Руководствуясь современными методами математического планирования эксперимента, мы спланировали эксперимент «ортогонально», т. е. варьировали переменные по такому плану, чтобы скалярные произведения разноименных векторов-столбцов в матрице планирования X были равны нулю $\left(\sum\limits_{u=1} x_{iu} \cdot x_{ju} = 0 \right)_{i \neq j}$. Тогда, очевидно, матрица коэффициентов $X^* \, X$ системы уравнений становится диагональной $\left(\sum\limits_{u}^{N} x_{iu}^2 \neq 0 \right)$ и система распадается на K+1 самостоятельных равенств.

Преимущества ортогонального планирования эксперимента:

1. Информацию о каждом коэффициенте регрессии несут все N опытов, поэтому коэффициенты оцениваются с минимальной и одинаковой дисперсией.

2. Каждый коэффициент регрессии b_i определяется независимо от других по формуле

$$b_i = \frac{\sum\limits_{u=1}^{N} x_{iu} \cdot y_u}{\sum\limits_{u=1}^{N} x^2_{iu}}. \tag{8}$$

Это значит, что линейные эффекты определяются независимо от парных взаимодействий, определяется степень влияния каждого фактора и каждого взаимодействия двух или нескольких факторов, т. е. получаем математическую модель процесса.

3. Упрощаются расчеты, так как не нужно решать систему уравнений.

4. Планирование является рототабельным, т. е. информация поступает равномерно из всех областей поверхности отклика.

Нами получена следующая зависимость для машин 2-го габарита серии П:

$$\hat{y}=7,4\cdot 10^{-2}\cdot 1^{0,80}\cdot \exp\left[-0,0955\cdot p+0,0087\cdot e+0,72E+1,64\sigma\right], b. \qquad (9)$$

Здесь напряжение и скорость введены в постоянную составляющую своими номинальными значениями с соответствующими коэффициентами регрессии ввиду незначительности последних.

Для оценки остаточной дисперсии определяем остаточную сумму квадратов по формуле

$$S_R=\sum_{u=1}^{N}(y_u-\hat{y}_u)^2=\sum_{u=1}^{N}y_u^2-\sum_{i=0}^{k}b_i\sum_{u-1}^{N}x_{iu}\cdot y_u=33,7. \qquad (10)$$

Множественный коэффициент корреляции

$$R=\sqrt{1-\frac{S_R}{\sum\limits_{u=1}^{N}(y_u-\bar{y})^2}}=0,802 \qquad (11)$$

с оценкой снизу $R_н=0,67$ и оценкой сверху $R_в=0,88$ при 95-проц. уровне значимости.

Относительная остаточная дисперсия

$$\delta_R=\frac{D(y)-\sum\limits^{k}b_i^2\cdot D(x_i)}{D(y)}=0,358. \qquad (12)$$

Высокое значение R и сравнительно малое значение δ_R свидетельствует о том, что принята во внимание значимая часть существенных факторов, объясняющая значительную часть дисперсии искрения. В дальнейшей работе мы намерены включить в модель параметры, характеризующие отклонения геометрии магнитной системы и положения щеток относительно геометрической нейтрали, марку щеток и другие факторы.

Когда уравнение регрессии (2) будет доведено до необходимой степени адекватности с функцией отклика, оно может быть использовано для решения следующих задач:

1. Оценки среднего значения и разброса искрения, если известны фактические значения x_i и дисперсии $D(x_i)$ для данного уровня технологии.

2. Назначения допусков на параметры x_i, если задан допуск на искрение. Эта задача неоднозначна, можно определить лишь многомерную область допустимых значений $D(x_i)$. При необходимости оптимизации системы допусков по стоимости неизбежно применение математического программирования.

3. Прогноза доли машин, имеющих недопустимое искрение как на испытательной станции завода-изготовителя, так и в процессе эксплуатации. В последнем случае необходимо знать средние скорости изменения x_i во времени.

ЛИТЕРАТУРА

1. И. П. Клепиков, С. Н. Соколов. Анализ и планирование экспериментов методом максимума правдоподобия, изд. Наука, Москва, 1964.

2. В. В. Налимов, Н. А. Чернова. Статистическое планирование экстремальных экспериментов изд. Наука, Москва, 1965.

3. Л. Н. Большов, Н. В. Смирнов. Таблицы математической статистики, изд. Наука, Москва, 1965.