ИЗВЕСТИЯ
ТОМСКОГО ОРДЕНА ТРУДОВОГО КРАСНОГО ЗНАМЕНИ ПОЛИТЕХНИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА имени С. М. КИРОВА

Том 160 1966

# ОПТИМИЗАЦИЯ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ МАШИН С ПОМОЩЬЮ ПОВЕРХНОСТЕЙ ОТКЛИКА

А. С. ГИТМАН, Э. К. СТРЕЛЬБИЦКИЙ

Задача нахождения оптимальных соотношений размеров электрических машин восходит еще к М. Видмару, который оптимизировал квадратичные формы двух переменных [1]. В такой постановке задача теряла свой прикладной смысл и являлась не более, чем изящной иллюстрацией существования экстремума по стоимости. Сам Видмар понимал несовершенство своей теории экономической соразмерности, более поздними исследователями эта теория была дополнена понятием действительности стоимости, что позволило учитывать условия эксплуатации [2]. Тем не менее этот учет не вывел задачу из рамок двухмерного пространства и не избавил от необходимости последовательных приближений. Причина неинструментальности этой теории и сильного ее усложнения при переходе к пространству большего числа переменных заключается в наличии существенных эффектов взаимодействия между независимыми переменными. Наличие этих эффектов давало возможность аналитически находить только локальные оптимумы при двух независимых переменных. Отыскание глобального оптимума неизбежно приводило к вариантному методу расчета. Появление быстродействующих ЭЦВМ значительно увеличило скорость и точность определения оптимума [3]. Тем не менее ЭЦВМ не сняли существенный недостаток вариантного метода — получение только числового решения, которое в дальнейшем нельзя подвергать аналитическим преобразованиям при увязке отдельных вопросов проектирования (тепловой и вентиляционный расчеты, учет изменения технических условий). Этот недостаток становится еще более существенным, если иметь в виду очевидную необходимость провести в дальнейшем более широкую оптимизацию при статистическом учете многообразия фактических режимов работы машин в эксплуатации.

Исходя из сказанного, представляется целесообразным найти достаточно простую и достаточно адекватную аналитическую форму, которая отражала бы наличие всех существенных связей между переменными. Это оказывается возможным сделать с помощью предлагаемого метода математического планирования расчета, разработанного на основе недавно появившейся теории факторного анализа [4]. Эффективность нового метода увеличивается с ростом числа независимых переменных, включаемых в рассмотрение. Существенным здесь является возможность получения математико-экономической модели. Эта модель является окончательной при принятой методике оценки экономической эффективности, и различные частные задачи (изменение технических условий, сортамента применяемых материалов) решаются аналитически, причем решения всегда получаются оптимальными.

Математически задача состоит в определении коэффициентов в уравнении регрессии

$$\hat{y} = \psi (x_1, x_2, ..., x_h) = b_o + \sum_i^h b_i x_i + \sum_i^h \sum_j^h b_{ij} x_i x_j. \qquad (1)$$

$y$ — действительная стоимость машины,

$\hat{y}$ — оценка $y$ по уравнению (1),

$x_i$ — конструктивные размеры машины,

$h$ — число учитываемых размеров.

Члены $b_i x_i$ — характеризуют линейные эффекты, $b_{ii} x_i^2$ — квадратичные эффекты, $b_{ij} x_i x_j$ — эффекты двойного взаимодействия.

Уравнение (1) называют функцией отклика, а соответствующий ей геометрический образ в пространстве переменных $x_i$ — поверхностью отклика.

Для большинства задач достаточно иметь линейную или квадратичную форму (1).

Линейную форму обычно применяют для восхождения по градиенту в район экстремума.

Движение по методу крутого восхождения заканчивается, когда мы попадаем в почти стационарную область, которая не может быть описана при помощи линейного приближения. В этой части поверхности отклика доминирующими являются коэффициенты регрессии, характеризуемые эффектами взаимодействия. Почти стационарную область обычно удается описать полиномами второго порядка. Априори можно считать квадратичную форму достаточно адекватной для нашей задачи. Нетрудно заметить, что квадратичные зависимости М. Видмара являются пересечением поверхности отклика [1] с гиперплоскостями, параллельными осям переменных, варьируемых при оптимизации.

Коэффициенты уравнения (1) находятся методом наименьших квадратов при вариации независимых переменных $N$ раз. Приравнивая нулю частные производные от квадратичной формы

$$\sum_{u=1}^{N} (y_u - \hat{y}_u)^2 = \min, \qquad (2)$$

взятые по переменным $b_i$, получим систему так называемых нормальных уравнений.

Коэффициенты $b_i$ являются решением полученной системы.

Ради упрощения обозначений обратимся к матричной алгебре. Будем называть прямоугольную $(h, N)$ — матрицу $X$ матрицей независимых переменных, матрицу — столбец $Y$ — вектором наблюдений, матрицу — столбец $B$ — вектором коэффициентов регрессии.

В матричной форме система нормальных уравнений запишется следующим образом:

$$X^* XB = X^* Y \qquad (3)$$

Решением системы (3) является выражение

$$B = (X^* X)^{-1} (X^* Y) \qquad (4)$$

В случае линейности истинной связи между $Y$ и $X$ решение (4) не зависит от расположения экспериментальных точек в факторном пространстве. Однако, если в матрице $X$ скалярные произведения для всех векторов-столбцов равны нулю $\left(\sum_u^N x_{iu} \; x_{ju} = 0\right)$, т. е. матрица $X$ спланирована ортогонально, то матрица $(X^* X)$ получается диагональной, и мы избавляемся от необходимости решать систему (3).

Критерий ортогональности является недостаточно сильным критерием оптимальности для планирования второго порядка.

Информация о поверхности отклика, содержащаяся в уравнении регрессии, может быть оценена с помощью обратной стандартизованной дисперсии $1/N\sigma^2(\hat{y})$. Для различных точек факторного пространства эта величина принимает разные значения. Поэтому имеет смысл рассматривать информационные контуры поверхности равной информации. Планирование, обладающее свойством равномерного распределения информации, называется ротатабельным планированием. При повороте факторных осей в пространстве точность определения коэффициентов регрессии не меняется.

В математической теории эксперимента в настоящее время разработаны способы построения ротатабельных планов второго порядка.

Таким образом, нахождение аналитического представления (1) сводится к поверочному расчету y для различных комбинаций $x_i$, задаваемых по определенному плану, и последующему определению коэффициентов регрессии.

Для учета ограничений, накладываемых техническими условиями, рассмотрим другие поверхности отклика:

$$\begin{aligned} y_1 &= \varphi_1 (x_1, x_2, ..., x_h) \\ y_i &= \varphi_i (x_1, x_2, ..., x_h) \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ y_m &= \varphi_m (x_1, x_2, ..., x_h), \end{aligned} \tag{5}$$

где $y_i$—i-тое техническое условие (мощность пусковой момент и т. п.). Эти поверхности отклика получаем поверочным расчетом при том же плане, что и для $\psi (x_1, x_2, ...,x_h)$.

Оптимизацию (1) при ограничениях (5) можно произвести, например, пользуясь методом неопределенных множителей Лагранжа. Этот метод сводится к решению системы:

$$\begin{aligned} &\frac{\partial\psi}{\partial x_1} + \lambda_1 \frac{\partial\varphi_1}{\partial x_1} + \lambda_2 \frac{\partial\varphi_2}{\partial x_1} + ... + \lambda_m \frac{\partial\varphi_m}{\partial x_1} = 0, \\ &\frac{\partial\psi}{\partial x_2} + \lambda_1 \frac{\partial\varphi}{\partial x_2} + \lambda_2 \frac{\partial\varphi_2}{\partial x_2} + ... + \lambda_m \frac{\partial\varphi_m}{\partial x_2} = 0, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ &\frac{\partial\psi}{\partial x_h} + \lambda_1 \frac{\partial\varphi_1}{\partial x_h} + \lambda_2 \frac{\partial\varphi_2}{\partial x_h} + ... + \lambda_m \frac{\partial\varphi_m}{\partial x_h} = 0, \\ &\varphi_1 (x_1, x_2, ..., x_h) = y_1 \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ &\varphi_m (x_1, x_2, ..., x_h) = y_m \end{aligned} \tag{6}$$

Решением системы (6) является вектор оптимальных размеров $X_{max}$.

Система (6) может быть решена средствами вычислительной математики, например, методом наискорейшего спуска.

Представим далее $X_{imax}$ в виде квадратичного полинома от Y

$$\begin{aligned} x_{1max} &= a_{10} + \sum_i^m a_{1i}\, y_i + \sum_i^m \sum_j^m a_{1ij}\, y_i y_j, \\ x_{2max} &= a_{20} + \sum_i^m a_{2i}\, y_i + \sum_i^m \sum_j^m a_{2ij}\, y_i y_j, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \end{aligned} \tag{7}$$

$$x_{hmax} = a_{ho} + \sum_{i}^{m} a_{hi} y_i + \sum_{i}^{m} \sum_{j}^{m} a_{hij} y_i y_i$$

Для поиска коэффициентов формы (7) снова применим ротатабельное планирование, варьируя на этот раз составляющие $y_i$.

Перепишем систему (7) в матричной форме

$$x_m = AY \tag{8}$$

Матрицу А можно рассматривать как математико-экономическую модель отрезка серии, так как она переводит вектор технических условий Y в вектор размеров $X_{max}$, соответствующий оптимальной машине.

Планирование расчета резко сокращает количество вариантов, например, для 7 независимых переменных, достаточно провести поверочный расчет для 163 комбинаций. Кроме того, мы получаем, кроме числового решения (6), также и ряд важных аналитических зависимостей (1) и (5), которые мы можем использовать для других целей, например, при решении точностных задач.

## ЛИТЕРАТУРА

1. М. Видмар. Экономические законы проектирования электрических машин, ГОНТИ, 1930.

2. И. М. Постников. Проектирование электрических машин. Гостехиздат УССР, 1960.

3. Б. М. Каган. Тер-Микаэлян Т. М. Решение инженерных задач на цифровых вычислительных машинах, Энергия, 1964.

4. В. В. Налимов, Н. А. Чернова. Статистические методы планирования экстремальных экспериментов, Наука, 1965.