ИЗВЕСТИЯ
ТОМСКОГО ОРДЕНА ТРУДОВОГО КРАСНОГО ЗНАМЕНИ ПОЛИТЕХНИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА имени С. М. КИРОВА

Том 162 1967

РЕШЕНИЕ НЕЛИНЕЙНЫХ ЗАДАЧ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ МЕТОДОМ ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНОЙ АППРОКСИМАЦИИ ЗАКОНОВ ИЗМЕНЕНИЯ ТЕРМИЧЕСКИХ ПАРАМЕТРОВ

А. В. ФУРМАН, Г. Ф. ШИЛИН

(Представлена проф. Г. И. Фуксом)

В работе [1] изложен приближенный способ расчета нестационарного температурного поля в твердых телах, когда коэффициент теплопроводности λ и теплоемкость c связаны с температурой линейными зависимостями, а $\rho = \text{const}$. В настоящей статье метод обобщается на случай более общих связей λ и c с температурой при $\rho = \rho(\mathrm{T})$.

Задача нахождения нестационарного поля температур в теле в случае, когда теплофизические параметры зависят от температуры, сводится к решению нелинейного дифференциального уравнения теплопроводности:

$$R(\mathrm{T})\, C(\mathrm{T}) \frac{\partial \mathrm{T}}{\partial \tau} = a_0 div\, [L(\mathrm{T}) \operatorname{grad} \mathrm{T}], \tag{1}$$

с соответствующими краевыми условиями.

Функции температуры R, C и L в (1) предполагаются известными.

Обращая функцию $L(\mathrm{T})$, чтобы получить $\mathrm{T}(L)$, и принимая затем L за независимую переменную, представим уравнение (1) в следующем виде:

$$R(\mathrm{T})\, C(\mathrm{T}) \frac{d\mathrm{T}}{dL} \cdot \frac{\partial L}{\partial \tau} = a_0 div \left[L(\mathrm{T}) \frac{d\mathrm{T}}{dL} \operatorname{grad} L \right]. \tag{2}$$

В уравнении (2) полагаем

$$L(\mathrm{T}) \frac{d\mathrm{T}}{dL} = \frac{1}{M} = \text{const},$$

$$R(\mathrm{T})\, C(\mathrm{T}) \frac{d\mathrm{T}}{dL} = \frac{1}{N} = \text{const},$$

что соответствует замене истинных связей $L(\mathrm{T})$ и $C(\mathrm{T})$ экспоненциальными функциями вида:

$$L(\mathrm{T}) \approx A \exp [M\mathrm{T}], \tag{3}$$

$$C(\mathrm{T}) \approx B \exp \left[N \int R(\mathrm{T}) \frac{dC/d\mathrm{T}}{dL/d\mathrm{T}} \cdot d\mathrm{T} \right]. \tag{4}$$

Таким образом, аппроксимация уравнений состояния $L = L(\mathrm{T})$ и $C = C(\mathrm{T})$ в заданном интервале изменения температуры Т или, если этот интервал достаточно велик, то на его отдельных участках, экспоненциальными графиками (3) и (4) соответственно позволяет приближенно линеаризовать уравнение (1):

$$\frac{M}{N}\cdot\frac{\partial L}{\partial\tau}=a_0\nabla^2 L. \qquad (5)$$

При этом краевые условия к уравнению (1)

$$\mathrm{T}_{\tau=0}=\mathrm{T}_{\text{нач.}}; \qquad (6)$$

или

$$\left.\begin{aligned}&\mathrm{T}_{\text{пов.}}=f(\tau)\\ &-\lambda_0\,[L(\mathrm{T})(\operatorname{grad}\mathrm{T})]_{\text{пов.}}=q(\tau)\end{aligned}\right\} \qquad (7)$$

для новой переменной L запишутся следующим образом:

$$L_{\tau=0}=L_{\text{нач.}}; \qquad (8)$$

или

$$\left.\begin{aligned}&L_{\text{пов.}}=\psi(\tau)\\ &-(\operatorname{grad}L)_{\text{пов.}}=\frac{M}{\lambda_0}q(\tau).\end{aligned}\right\} \qquad (9)$$

Решение полученной линейной системы (5), (8), (9) — задача менее сложная, чем исходной нелинейной (1), (6), (7). Для многих конкретных случаев эти решения известны [2].

Линейная система может быть получена и для граничного условия третьего рода, если безразмерная теплопроводность линейно зависит от температуры

$$L(\mathrm{T})=1+m\mathrm{T}.$$

При любом ином виде функции $L(\mathrm{T})$ граничное условие останется нелинейным. Однако, если обнаружена линейная зависимость от температуры для безразмерных или плотности, или же теплоемкости

$$R(\mathrm{T})=1+e\mathrm{T},$$
$$C(\mathrm{T})=1+n\mathrm{T},$$

то, используя R или же C в качестве переменной, можно привести систему к линейной.

Так, через переменную R уравнение (1) перепишется:

$$R(\mathrm{T})\,C(\mathrm{T})\frac{d\mathrm{T}}{dR}\cdot\frac{\partial R}{\partial\tau}=a_0\operatorname{div}\left[L(\mathrm{T})\frac{d\mathrm{T}}{dR}\operatorname{grad}R\right].$$

Полагая

$$L(\mathrm{T})\frac{d\mathrm{T}}{dR}=\frac{1}{M'}=\mathrm{const}, \qquad (10)$$

$$R(\mathrm{T})\,C(\mathrm{T})\frac{d\mathrm{T}}{dR}=\frac{1}{E}=\mathrm{const}, \qquad (11)$$

получим линейное уравнение с постоянными коэффициентами. Условия (10) и (11) соответствуют аппроксимации действительных уравнений состояния $L(\mathrm{T})$ и $R(\mathrm{T})$ экспоненциальными графиками следующего вида:

$$L(\mathrm{T})\approx A'\exp\left[M'\int\frac{dL/d\mathrm{T}}{dR/d\mathrm{T}}\cdot d\mathrm{T}\right],$$

$$R(\mathrm{T})\approx D\exp\left[E\int C(\mathrm{T})\,d\mathrm{T}\right].$$

Нелинейное граничное условие третьего рода к уравнению (1)

$$-\lambda_0 [L(\mathrm{T})(\mathrm{grad\,T})]_{\text{пов.}} = \alpha(\mathrm{T}_{\text{пов.}} - \mathrm{T_c})$$

для новой переменной R запишется линейно

$$-(\mathrm{grad}\,R)_{\text{пов}} = M' \frac{\alpha}{\lambda_0}\left(\frac{R_{\text{пов}}}{e} - \frac{1}{e} - \mathrm{T_c}\right).$$

Аналогичным путем линеаризуется система, если в качестве переменной использована C. Для этого необходимы аппроксимации вида:

$$L(\mathrm{T}) \approx A'' \exp\left[M'' \int \frac{dL/d\mathrm{T}}{dC/d\mathrm{T}}\, d\mathrm{T}\right],$$

$$C(\mathrm{T}) \approx B' \exp\left[N' \int R(\mathrm{T})\, d\mathrm{T}\right].$$

В качестве примера рассматривался ковективный нагрев пластины ($\mathrm{T}_{\text{нач.}} = 273°\,\mathrm{K}$, $\mathrm{T_c} = 833°\,\mathrm{K}$), выполненной из аустенитной стали типа ЭЯ1Т. Зависимости безразмерных термических параметров от температуры приняты по данным [3]:

$$L(\mathrm{T}) = 1 + 0{,}1271 \cdot 10^{-2}\,\mathrm{T},$$

$$C(\mathrm{T}) = 1 + 0{,}6978 \cdot 10^{-3} \cdot \mathrm{T} - 0{,}2108 \cdot 10^{-6} \cdot \mathrm{T}^2,$$

$$R(\mathrm{T}) = 1 - 0{,}0056 \cdot 10^{-2} \cdot \mathrm{T}.$$

Результаты расчетов, проведенных на ЭВМ, представлены в табл. 1 для двух значений комплекса $B_i = \frac{\alpha l}{\lambda_0}$: 0,5 и 5,0. Там же приводятся

Таблица 1

Сравнение данных аналитического расчета конвективного нагрева пластины из аустенитной стали с численными, полученными на электронно-вычислительной машине

	Bi=0,5							Bi=5,0					
	поверхность			средняя плоскость				поверхность			средняя плоскость		
$\underset{\sim}{F_0}$	данные ЭВМ	аналитич. расчет	Δ, %	данные ЭВМ	аналитич. расчет	Δ, %	$\underset{\sim}{F_0}$	данные ЭВМ	аналитич. расчет	Δ, %	данные ЭВМ	аналитич. расчет.	Δ, %
1,0	417	414	0,7	428	436	1,9	0,25	682	680	0,3	415	426	2,7
2,0	589	599	1,7	552	564	2,2	0,50	735	741	0,8	577	589	2,0
3,0	661	674	2,0	636	650	2,2	1,00	795	800	0,6	737	745	1,1
4,0	711	725	2,0	694	709	2,2	1,50	819	821	0,3	797	801	0,5
5,0	746	760	1,9	735	749	1,9	2,00	828	829	0,1	820	822	0,2
6,0	772	783	1,4	763	776	1,7	2,50	831	831	0,0	828	829	0,1

результаты, полученные приближенно методом аппроксимации истинных графиков состояния $L(T)$ и $C(T)$ в интервале изменения T от 273 до 833° К экспоненциальными функциями вида:

$$L(T) \approx A \exp [MT] = 1{,}11190 \exp [0{,}74991 \cdot 10^{-3} \cdot T],$$

$$C(T) \approx B \exp \left[N \int R(T) \frac{dC/dT}{dL/dT} \cdot dT \right] = 1{,}00510 \exp [0{,}10882 \times$$

$$\times 10^{-2} (0{,}54901T - 0{,}18123 \cdot 10^{-2} T^2 + 0{,}61919 \cdot 10^{-8} T^3)].$$

Из сравнения видно, что максимальная погрешность приближенного расчета на данном интервале изменения T не превышает 3%. С ростом Bi точность расчета повышается.

Обозначения:

$R = \frac{\rho}{\rho_0}$, $C = \frac{c}{c_0}$, $L = \frac{\lambda}{\lambda_0}$ и $F_0 = \frac{a_0 \tau}{l^2}$ — соответственно безразмерные плотность, теплоемкость, теплопроводность и время;

ρ_0, c_0, λ_0, a_0 — характерные значения соответствующих величин;

$2l$ — толщина пластины;

m, n, e — константы, зависящие от природы вещества.

ЛИТЕРАТУРА

1. В. В. Иванов, А. В. Фурман. ИЖФ, том IX, 1965.
2. А. В. Лыков. Теория теплопроводности. ГИТТЛ, 1952.
3. Справочник под редакцией проф. Н. Б. Варгафтика. Теплофизические свойства веществ. ГЭИ, 1956.